Csaba SÁRVÁRI, Pécs

Interaktive Hilfeleistung und Computer Algebra Systeme (CAS)

Einleitung

Die Nutzung eines CAS im Mathematikunterricht hat Auswirkungen auf das ganze Curriculum.
Die neueren Versionen von Maple CAS bieten spezielle Möglichkeiten für schrittweise Lösung, für differenzielle Hilfeleistung. Mit diesem Mittel verknüpft mit Instruktionen kann auch die kognitive Selbstregelung und die metakognitive Denkungsart gestützt werden.
In unserem Vortrag werden unsere ersten Erfahrungen in Pecs behandelt.

Der interaktive Kommunikationsprozess

Die nichttraditionellen Elemente des interaktiven Kommunikationsprozesses an unseren Kursen sind:

- das E-Learning System und ein lokales Netz
- ein Computer Laboratorium mit Projektor und Tight VNC Kontrollsystem
- das Computer Algebra System

Ein E-Learning System hat im allgemeinen die folgenden Funktionen:
Lernstoffquelle, thematisierte Auswahl des Lernmaterials, Rückkopplung, Dokumentation, Kontakt zwischen Studenten und Studenten - Lehrern. Hauptfunktion des E-Learning Systems, als Element des interaktiven Kommunikationsprozesses, ist die Verbindung der verschiedenen Phasen der Lerntätigkeit. In dieser Hinsicht ist das E-Learning System Organisator des Lernprozesses mit längster Periode.
Das Tight VNC Kontrollsystem ist ein besonderes Mittel der interaktiven Hilfeleistung. Mit VNC steuert man einen anderen Computer über Intranet oder Internet fern. VNC ist die Abkürzung für "Virtual Network Computing" und zeigt den Desktop eines anderen Rechners an.
Die Hauptfunktion des Tight VNC System ist die Ausführung der Interaktion zwischen Studenten und zwischen Studenten und Lehrern. Dieses System hilft uns, kurzfristige Rückkopplungen zu verwirklichen.

Interaktive CAS-Mittel

Maple CAS hat – so wie alle CAS - verschiedene Mittel, um bei der interaktiven Problemlösung wirksam zu helfen. Die Verwendung von CAS zieht sich voll durch den Prozess der Instrumentalen Genese.
Der Begriff der Instrumentalen Genese wurde von L. Trouche (2003) eingeführt. Ein Mittel (CAS) wird durch den Prozess der 'instrumentalen

Genese' zu einem mathematischen Werkzeug. Die instrumentale Genese ist ein zweiseitiger interaktiver Prozess:
Instrumentation ist der Prozess, in dem sich der Student während der Transponierung des Wissens am Computer mit den Möglichkeiten und Grenzen des CAS vertraut macht. Die andere Seite der Instrumentalen Genese, die „*Instrumentalization*“, zeigt in Richtung des Mittels. Diese hat mehrere Stufen: die Entdeckung der verschiedenen Funktionen des Mittels, die Transformation des Mittels, die Ergänzung der Funktionalitäten mit neuen Elementen.
Die Instrumentale Orchestrierung ist die äußere Organisation der instrumentalen Genese. Es ist eine besondere Organisation von Raum und Zeit in der Arbeit im Unterricht, eine komplexe interaktive Tätigkeit (Sárvári, 2005).
Die Maple-Bibliothek **Student[Calculus1]** ist ein Mittel für die schrittweise Berechnung der Ableitung, des Grenzwertes einer Funktion und von Integralen. Eine andere Möglichkeit bietet das **Paket Student** mit Verfahren zur Unterstützung der experimentellen Arbeitsweise bei der Berechnung der Integrale. Beide Bibliotheken unterstützen besonders erfolgreich die selbständige Arbeit der Studenten.
Mit dem ersten Beispiel möchte ich die Experimentierung, die Verallgemeinerung und die Konstruktion als interaktive Tätigkeiten demonstrieren.

1. Beispiel *Man bestimme das Integral*

```
> with(Student[Calculus1]):
infolevel[Calculus1] := 1:#damit Information wird gegeben
> Int(x*exp(sqrt(x)),x);
```

$$\int x\, e^{(\sqrt{x})}\, dx$$

Erstens bitten wir um eine Anweisung:

```
> Hinweis(%);
Creating problem #1
```

$$[Partielle, x^{(3/2)}, 2\, e^{(\sqrt{x})}], [Substitution, u = \sqrt{x}, u]$$

Wir bekommen zwei Vorschläge und probieren den zweiten Vorschlag aus!

```
> Regel[%[2]](%%);
Applying substitution x = u^2, u = x^(1/2) with dx =
2*u*du, du = 1/2/x^(1/2)*dx
```

$$\int x\, e^{(\sqrt{x})}\, dx = \int 2\, u^3\, e^u\, du$$

Was wäre es, wenn wir $t = e^{\sqrt{x}}$ setzen ? Wir wollen auch diese Substitution ausprobieren!

```
Regel[Substitution,t=exp(sqrt(x))](Int(x*exp(sqrt(x)),x));
Creating problem #2
Applying substitution x = ln(t)^2, t = exp(x^(1/2)) with dx
= 2*ln(t)/t*dt, dt = 1/2/x^(1/2)*exp(x^(1/2))*dx
```

$$\int x\, e^{(\sqrt{x})}\, dx = \int 2\ln(t)^3\, dt$$

Anstatt der ursprünglichen Aufgabe lösen wir den verallgemeinerten Fall, d.h.

$$\int \ln(t)^k\, dt$$

Man kann die partielle Integration versuchen. Dafür wird die **intparts** Prozedur aus der Bibliothek **student** mit **simplify** kombiniert aufgerufen:

```
> simplify(intparts(Int(ln(t)^k,t),ln(t)^k));
```

$$\ln(t)^k\, t - k \int \ln(t)^{(k-1)}\, dt$$

Das kann dann als eine rekursive Prozedur geschrieben werden:

```
> logint:=proc(k)
 if k=1 then RETURN(t*ln(t)-t) else
  t*ln(t)^k-k*logint(k-1)
fi
end:
```

Rufen wir diese Prozedur für k =3 auf, so bekommen wir als Ergebnis:

```
> 2*logint(3);
```

$$2\, t\ln(t)^3 - 6\, t\ln(t)^2 + 12\, t\ln(t) - 12\, t$$

```
> subs(t=exp(sqrt(x)),%);
```

$$2\, e^{(\sqrt{x})}\ln(e^{(\sqrt{x})})^3 - 6\, e^{(\sqrt{x})}\ln(e^{(\sqrt{x})})^2 + 12\, e^{(\sqrt{x})}\ln(e^{(\sqrt{x})}) - 12\, e^{(\sqrt{x})}$$

```
> factor(simplify(%,symbolic));
```

$$-2\, e^{(\sqrt{x})}(-x^{(3/2)} + 3\, x - 6\sqrt{x} + 6)$$

Als Kontrolle kann die Integration mit Hilfe von Maple direkt erledigt werden.

Interessant ist der Fall, wenn Maple keinen Hinweis geben kann, und das Integral nicht unmittelbar bestimmt werden kann. In diesen Fällen sollen zusätzliche spezielle Umformungen eingesetzt werden, und eine zusammengesetzte interaktive Tätigkeit kann uns Erfolg bringen.

2. Beispiel *Man bestimme das folgende Integral*

```
> Int((1+exp(-x))/(1+x*exp(-x)),x);
```

$$\int \frac{1 + e^{(-x)}}{1 + x\, e^{(-x)}}\, dx$$

Wir warten neugierig, was für einen Rat uns das System gibt.

```
> Hinweis(%);
Creating problem #1
```

$$[\mathit{Substitution}, u = -x, u]$$

```
> Regel[%](%%);
Applying substitution x = -u, u = -x with dx = -1*du, du = -1*dx
```

$$\int \frac{1+e^{(-x)}}{1+x\,e^{(-x)}}\,dx = \int \frac{1+e^{u}}{-1+e^{u}\,u}\,du$$

Damit sind wir nicht um vieles klüger geworden und suchen wiederum um Rat:

```
> Hinweis(%);
```

$$[\ ]$$

Das System kann uns nichts sagen! Wir versuchen daher selbst $e^{(-x)} = \frac{1}{e^{x}}$ zu setzen!

```
> Regel[umschreiben,exp(-x)=1/exp(x)](Int((1+exp(-
x))/(1+x*exp(-x)),x));
```

$$\int \frac{1+e^{(-x)}}{1+x\,e^{(-x)}}\,dx = \int \frac{e^{x}+1}{e^{x}+x}\,dx$$

Sofort sieht man, dass der Zähler die Ableitung des Nenners ist. Dafür ist die Substitution $t = e^{x} + x$ zweckmäßig.

```
> Regel[Substitution,t=exp(x)+x](%);
Applying substitution t = exp(x)+x with dt = (exp(x)+1)*dx
```

$$\int \frac{1+e^{(-x)}}{1+x\,e^{(-x)}}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt$$

Es ist schon ein Grundintegral. Mit dem **value** Befehl kann somit die Lösung gefunden werden.

```
> value(%);
Reverting substitution using t = exp(x)+x
```

$$\int \frac{1+e^{(-x)}}{1+x\,e^{(-x)}}\,dx = \ln(e^{x}+x)$$

Literatur

Trouche, L. (2003). Managing The Complexity of Human/Machine Interaction in a Computer Based Learning Environment (CBLE) : Guiding Student's Process Command Through Instrumental Orchestrations, http://www.lkl.ac.uk/research/came/events/reims/2-Presentation-Trouche.doc

Sárvári, Cs.(2005). Zur Integration von CAS in die Lernumgebung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, 501-504.