Georg SCHIERSCHER, LI-Schaan

Die Krümmung: Gefährtin der Steigung – aber Stiefkind des MU?

Abriss

Nicht selten hört man, dass 100% Steigung ‚lotrecht' bedeute und dass zwischen Steigung und Steigungswinkel ein linearer Zusammenhang bestehe! Ist da vielleicht im Mathematikunterricht [MU] etwas schief gelaufen? Steigung und Krümmung sind günstige Objekte zum Erlernen math. Begriffsbildung und Methodik als auch „vergleichender Anatomie". Mit den Werkzeugen des Computers lässt sich die im MU vernachlässigte Krümmung ebener Kurven schön veranschaulichen und numerisch angehen.

Steigung – Gerade

Abb. 1: Verkehrssignal: 24 % Steigung.

Abb. 2: Verkehrssignal: 15 % Gefälle.

Verkehrssignale regen zu Fragen an wie:

- Was bedeutet 24 % Steigung (Abb. 1) bzw. 15 % Gefälle (Abb. 2)?
- Wie kann in der Sprache der Mathematik zwischen Steigung und Gefälle unterschieden werden?
- Inwieweit sind die obigen Abb. zum „Nennwert" zu nehmen?
- In welcher Beziehung stehen Steigung und Steigungswinkel?
- Was bedeutet 100 % Steigung bzw. 100 % Gefälle?

Auf die letzte Frage bekommt man häufig – auch von Erwachsenen – die Antwort: «100 % Steigung/Gefälle = senkrecht hoch/tief, also 90°» (!) Schlimmer noch: «50 % Steigung = 45°-Anstieg», also ein linearer Zusammenhang zwischen Steigung und Steigungswinkel. (!!)

Die Richtung/Steigung einer Geraden ist (intuitiv) konstant; die **Konstanz entsprechender Seitenverhältnisse** der ähnlichen Stützdreiecke (Abb. 3) bietet sich geradezu an zur Definition der Steigung m.

In der Sek I ist es nun wichtig, Vor- und Nachteile der verschiedenen Wahlmöglichkeiten $m = \frac{\Delta x}{\Delta h}$, $m = \frac{\Delta y}{\Delta h}, \ldots, m = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu diskutieren.

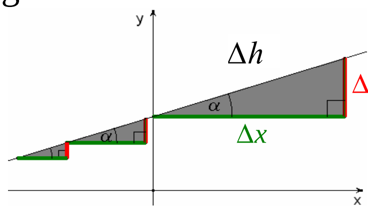

Abb. 3: Stützdreiecke.

Der Lernende mag stufengemäss, d.h. elementargeometrisch (Abb. 4), trigonometrisch (Abb. 5) und dann formal, wiederholt erfahren, dass zwischen der Steigung und dem Steigungswinkel kein linearer Zusammenhang besteht, dass also im allgemeinen $\tan(2\alpha) \neq 2 \cdot \tan(\alpha)$.

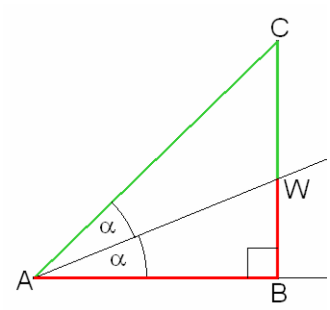

Abb. 4: Winkelhalbierende im ΔABC.

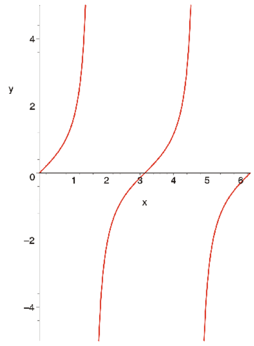

Abb. 5: Graph der Tangens-Funktion.

Krümmung – Kreis

Abb. 6: Gefährliche *Rechts*kurve.

Abb. 7: Gefährliche *Links*kurve.

Abb. 8: Einfassungen.

Abb. 9: Verschiedenförmige Zähnungen bei Briefmarken.

Die Beschäftigung mit den Abb. 6-8 kann viele Fragen und Beobachtungen zum Thema Krümmung initiieren; die Lernenden mögen insbes. ihre Erfahrungen beim Heraustrennen der Briefmarken (Abb. 9) kommentieren.

Krümmungskreise

Die Richtung/Steigung einer Kurve wird (in der Sek II) dadurch gewonnen, dass wir diese durch eine Grenzbetrachtung zu einer passenden Geraden in Beziehung setzen. Analog können wir zum Begriff der Krümmung *k* einer Kurve gelangen, indem wir diese mit einem passenden Kreis in Beziehung setzen. Eine Gerade ist durch zwei verschiedene Punkte bestimmt und hat überall die gleiche Richtung; entsprechend ist ein Kreis durch drei verschiedenene – vorerst nicht kollineare – Punkte bestimmt und überall in gleicher Weise gekrümmt, und zwar umso stärker, je kleiner sein Radius ist:

$|k| = 1/r$ für $r \neq 0$

$k = 0$ im Falle der Kollinearität von P_1, P_2 und P_3.

$k>0$ bzw. $k<0$, falls der Umlaufsinn des $\Delta P_1P_2P_3$ positiv (Abb. 10) resp. negativ (Abb. 11) ist.

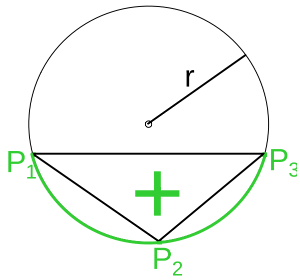

Abb. 10

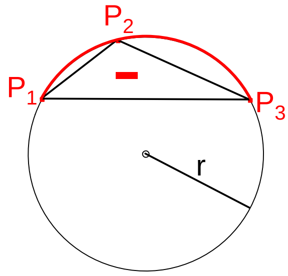

Abb. 11

Steigungs- und Krümmungsverlauf bei der Kreisbogenspirale

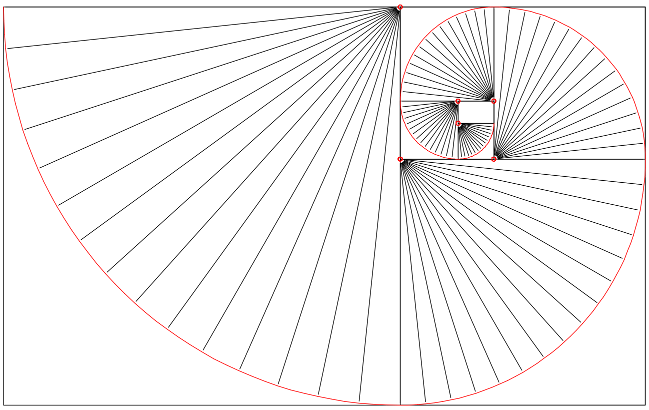
Abb. 12: Spirale aus sechs Viertelkreisen im Goldenen Rechteck.

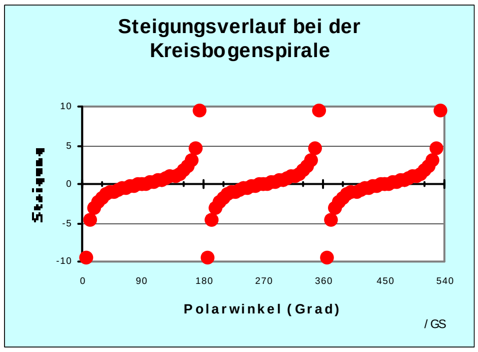

Abb. 13: Steigungsdiagramm.

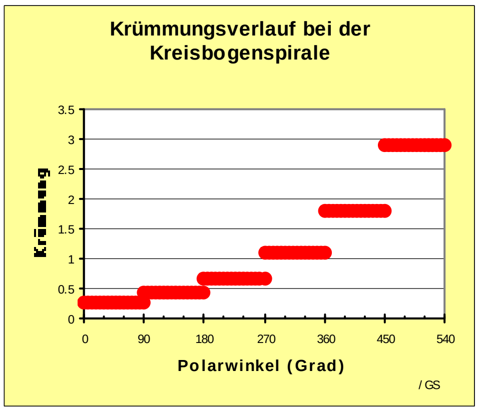

Abb. 14: Krümmungsdiagramm.

Die Abb. 12, 13 und 14 wollen einzeln und im Verbund interpretiert werden (wozu hier kein Platz ist). Nur soviel: An den Kreisbogenübergängen finden Krümmungssprünge statt! – solche sind bei Schnellstrassen nicht erlaubt. Bei deren Konzeption spielt die Klothoide (siehe unten) eine ausgezeichnete Rolle.

Krümmungskreis als Grenzgebilde

Es sei P_0 ein Punkt im Innern eines beliebigen, aber „gutartigen“ Kurvenstücks *c* gegeben, P sei ein weiterer Kurvenpunkt in hinreichender Nähe von P_0. Dann schneiden sich die Kurvennormalen durch P_0 und P in einem Punkt M, der beim Grenzübergang $P \to P_0$ zum Mittelpunkt des Krümmungskreises von *c* in P_0 wird. Sei Q ein weiterer Punkt auf *c*; dann kann der Krümmungkreis in P_0 in nahe verwandter Art als Grenzlage eines Kreises durch P_0, P und Q erhalten werden. (Im vektoriellen Zugang zur Krümmung habe ich leider keine Lehrerfahrung.)

Wir lassen eine kleine Auswahl weiterer Bilder sprechen:

Steigungs- und Krümmungsverlauf bei der Doppelklothoide

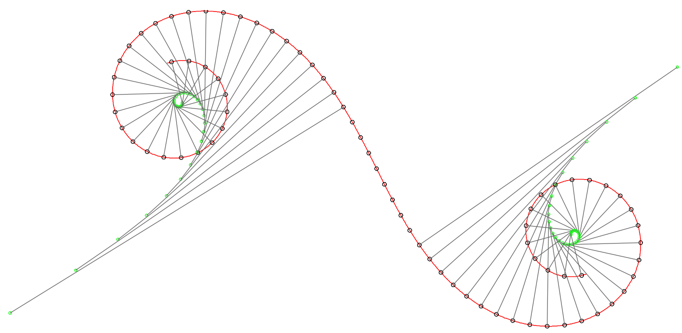

Abb. 15: Doppelklothoide mit Kurvennormalen und Evolute (=Krümmungsmittelpunktskurve).

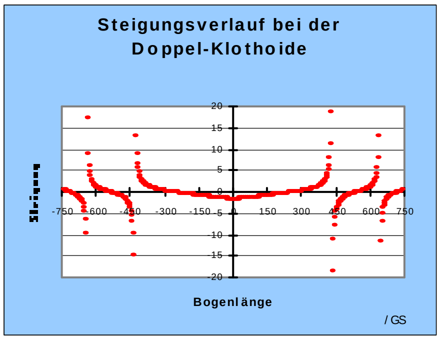

Abb. 16: Steigungsdiagramm.

Markante Eigenschaft der Klothoide: Ihre Krümmung wächst linear mit der Bogenlänge. Dank dessen werden bei Schnellstrassen zwischen Gerade und Kreisbogen oder zwischen zwei Kreisbogen zur Vermeidung von Krümmungssprüngen Klothoidenstücke als Übergangsbogen eingesetzt (vgl. altgediente Kloth.-Lineale).

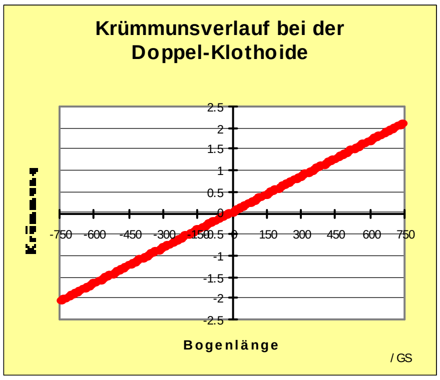

Abb. 17: Krümmungsdiagramm.

Stabilität eines Parabelrollers[1]

Beim Parabelroller (Abb. 18) kann der Schwerpunkt S durch Verschieben der Magnetknöpfe verändert werden. Die Evolute der Parabel sei mit E bezeichnet. Wir erwähnen wenigstens noch den der Schulmathematik zugänglichen Sachverhalt:
Liegt S

1. unterhalb von E, dann gibt es genau eine Ruhelage
2. auf E, dann gibt es zwei Ruhelagen
3. oberhalb von E, dann gibt es drei Gleichgewichtslagen, wobei die mittlere instabil ist.

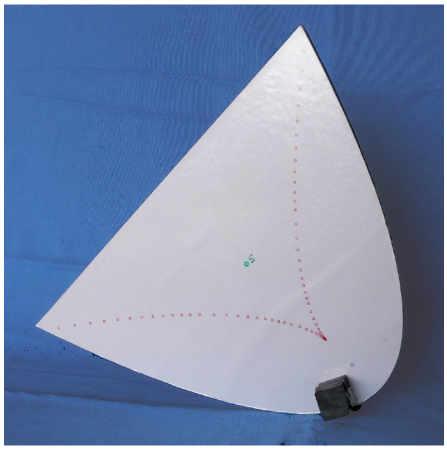

Abb. 18: Parabelroller mit variablem Schwerpunkt.

---

[1] 1. N. Sigrist: Auf der Kippe. In: Berichte über Mathematik und Unterricht. Hrsg. von Urs Kirchgraber. ETH Zürich (1995), Bericht No. 95-01.
2. Ian Stewart: Mathematische Unterhaltungen. In: Spektrum der Wissenschaft, Oktober 1992. (Seiten 10-15, insbesondere «Die Geometrie der Auftriebskurve»).