

Andrea SCHINK, Dortmund

## Vom Falten zum Anteil vom Anteil - Untersuchungen zu einem Zugang zur Multiplikation von Brüchen

### 1. Schwierigkeiten mit der Multiplikation von Brüchen

Viele empirische Studien belegen Schwierigkeiten von Lernenden mit Brüchen, insbesondere beim Multiplizieren (z.B. Wartha 2007, Padberg 2002<sup>3</sup>, Fischbein u.a. 1985): Während viele Schüler Rechenregeln vergleichsweise erfolgreich anwenden, haben sie inhaltliche Vorstellungen zur Multiplikation oft nur unzureichend aufgebaut. So werden etwa in Anwendungssituationen (z.B. zur Modellierung einer außermathematischen Situation) ungeeignete Operationen ausgewählt, oder es gelingt zu begrenzt, einen gegebenen Term mit einer inhaltlichen Deutung zu belegen (Prediger 2008, Wartha 2007). Einige dieser Schwierigkeiten lassen sich auf die Notwendigkeit zurückführen (Prediger 2008), bei der Zahlbereichserweiterung auf Bruchzahlen die Operation neu zu deuten (z.B. als ein Anteil-vom-Anteil-Nehmen) und die für natürliche Zahlen geltenden Regeln für Brüche neu zu prüfen (z.B. die Vorstellung „Multiplizieren vergrößert“).

Daher stellt sich nun die Frage, wie es gelingen kann, tragfähige Vorstellungen für die Multiplikation von Brüchen aufzubauen. Für das Design eines geeigneten Lernarrangements sollen im Sinne der Didaktischen Rekonstruktion (vgl. Kattmann / Gropengießer 1996) zunächst Lernendenperspektiven erfasst werden mit dem Ziel, Aufschlüsse über bestehende Schwierigkeiten und vorhandene Ressourcen zu erhalten. Dazu wurde eine Vorstudie durchgeführt, deren Ergebnisse hier dargestellt werden sollen.

### 2. Design einer Vorstudie

Ausgangspunkt der Studie war ein aus unserer Sicht überzeugender Zugang zur Multiplikation im Zahlenbuch 6 (Affolter u.a. 2004<sup>2</sup>, ähnlich bei Sinicrope / Mick 1992), in dem die Vorstellung des Anteil-vom-Anteilnehmens über Flächenanteile aufgebaut werden soll: Den Schülern wird eine Strategie zur Bestimmung von  $\frac{1}{3}$  von  $\frac{1}{4}$  eines Blattes präsentiert, welche sie nachvollziehen und anschließend selbst anwenden sollen.  $\frac{2}{3}$  von  $\frac{4}{5}$  wäre dann in Abb. 1 die dunkle Fläche. Den Anteil kann man ablesen:  $\frac{2}{3}$  von  $\frac{4}{5}$  sind  $(2 \cdot 4)$  von  $(3 \cdot 5)$  Kästchen, also 8 von 15 Kästchen, also  $\frac{8}{15}$  von der Gesamtfläche. Hier ist bereits ein wesentlicher, aber noch nicht endgültiger Schritt zur Multiplikation von Brüchen gemacht worden (im Zahlenbuch wird dazu das Meterquadrat betrachtet, wobei die Seitenlängen der Flächen als Bruchteile von 1 m gedeutet werden).

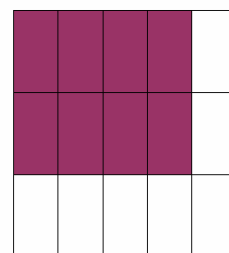


Abb. 1

Diesen Ansatz habe ich modifiziert in vier halbstandardisierten Partnerinterviews von 30-100 min Dauer (teilweise zwei Sitzungen) in einer 6. Gymnasialklasse eingesetzt. Die Schüler hatten Vorerfahrungen in einem handlungsorientierten Zugang zu Brüchen (zum Aufbau der Vorstellung vom Teil eines Ganzen in Zerteilprozessen und Verteilsituationen) und begannen im Regelunterricht gerade mit Addition, Subtraktion, Erweitern und Kürzen.

Die Lernumgebung dieser Vorstudie zielte auf den Vorstellungsaufbau über das Falten zum Anteil vom Anteil und darüber zur Multiplikation von Brüchen. Zuerst sollten die Schüler den geforderten Anteil vom Anteil durch Falten, bzw. Zeichnen bestimmen; erst für Stammbrüche (auch mit Vorhersage des Ergebnisses), dann für Nicht-Stammbrüche (analog).

### 3. Forschungsfragen und erste Ergebnisse

Die Arbeitsprozesse der Kinder wurden hinsichtlich folgender Forschungsfragen untersucht:

1. Welche inhaltlichen Vorstellungen bringen die Schüler mit, welche entwickeln sie?
2. Welche (Denk-) Hürden treten auf?

Dass in den Interviews zu den Faltrichtungen (im Gegensatz zu der Lernumgebung im Zahlenbuch 6) keine Vorgaben gemacht wurden, erwies sich als *selbst produzierte Hürde*, denn nur bestimmte Faltvorgänge führen – für die Schüler gar nicht offensichtlich – zur Multiplikation. Auf der Basis ihrer Erfahrung mit verschiedenen kreativen Bruchdarstellungen wurde jedoch das in der Rückschau so wichtige „Schachbrettmuster“ (vgl. Abb. 1) nicht immer spontan gewählt. Bei der Bestimmung von Anteilen von geeigneten Nicht-Stammbrüchen kommt man auch anders zum richtigen Ergebnis (z.B. mit Streifen; vgl. Abb. 2: Bestimmung von  $\frac{1}{4}$  von  $\frac{1}{3}$ ). Allerdings kommt man so nicht zur Multiplikation über die Flächenformel: In den vielen Knicken geht die doppelte Anteilsbildung „verloren“; Anteile lassen sich nur mühsam (z.B. durch Abzählen) bestimmen.

Eine bisher wenig thematisierte *konzeptuelle Schwierigkeit* trat an mehreren Stellen auf, nämlich die der unklaren Bezugsgrößen: Von welchem Ganzen habe ich eigentlich einen An-

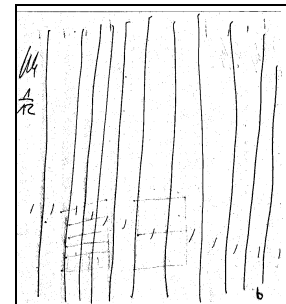


Abb. 2

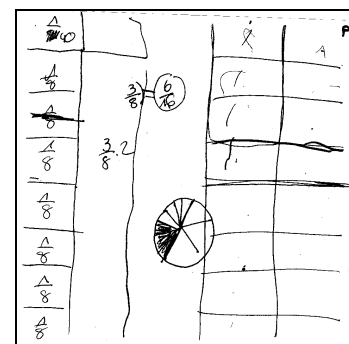


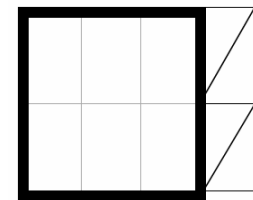
Abb. 3

teil genommen? Interessiert mich der Anteil vom *Ganzen* oder vom *Teil* des Ganzen? Der relative Anteil oder die absoluten Zahlen? Hiermit hängt auch die Frage nach der Bezeichnung der kleinsten Einheit zusammen.

*Beispiel 1:* Timo nahm eine erfolgreiche „Schachbrett“-Einteilung zur Bestimmung von  $\frac{1}{8}$  von  $\frac{1}{5}$  vor und schrieb der Übersicht halber  $\frac{1}{8}$  gleich in die Kästchen (vgl. Abb. 3): „Das wäre immer ein Achtel. Das wär dann ein Achtel von einem Fünftel. Das wären ja fünf und das ist ein Achtel von 5 Streifen.“ Kurz darauf erzeugte dies Irritation: Sein Partner bekam  $\frac{1}{40}$  raus. Timo überlegte noch mal. „Ach so, von der Gesamtfläche!“ Er änderte  $\frac{1}{8}$  zu  $\frac{1}{40}$  ab.

*Darf man in das Kästchen  $\frac{1}{8}$  schreiben, obwohl es nur  $\frac{1}{8}$  des betrachteten Fünftels ist? Was ist es vom Ganzen? Warum wird ein Anteil von einem Anteil gefaltet und dann nach dem Bezug zur Gesamtfläche gefragt?*

*Beispiel 2:* Cigdem und Burhan haben durch Falten  $\frac{3}{4}$  von  $\frac{2}{3}$  bestimmt (vgl. Abb. 4;  $\frac{1}{3}$  ist bereits weggeklappt; rekonstruiert). Nun sollen sie den Anteil von der Gesamtfläche angeben:



**Abb. 4**

C, B (gleichzeitig): 8.

I: Acht was?

B: Acht Achtel. [...]

Etwas später C: Das sind dann 6, die sind ja auch weg [deutet auf die beiden weg gestrichenen Kästchen]. 6. Also das hier sind Sechstel.

*Wie nehme ich den Anteil von einem Anteil? Warum kann ein Anteil nicht in „absoluten“ Kästchen angegeben werden?*

Da sich bislang noch nicht systematisch ausgewertete Belege für das Problem der Bezugsgrößen auch in anderen Untersuchungen zeigen (vgl. etwa Wartha 2007, S. 210 ff), lohnt es sich, diesem Phänomen im Weiteren genauer nachzugehen. So erscheinen solide Vorstellungen vom relativen Anteil (Malle 2004) als Voraussetzungen für den Aufbau einer Vorstellung vom Multiplizieren als Anteil-vom-Anteil-Nehmen.

Beide Forschungsfragen lassen sich vorläufig so beantworten: Schüler nutzen erworbene bildliche Bruchvorstellungen, welche für den Flächenansatz z.T. hinderlich sind, insofern sie nicht die Flächeninhaltsformel entdecken lassen (die Pizza-Vorstellung führt z.B. nicht weiter). Entdecken die Schüler die Rechteckdarstellung, bzw. wird diese angeregt, gelingt es ihnen i.A., an die Flächenberechnungen anknüpfend, zur Multiplikationsformel für Brüche zu kommen („Zähler•Zähler / Nenner•Nenner“).

Schwierig ist die Wahl der richtigen Bezugsgröße (das Bezugsgrößen-Problem „liegt aber tiefer“) – u.a. dadurch, dass der Ansatz nicht inhaltlich angebunden wird: Man deutet Brüche als Flächenanteile, aber es ist nicht offensichtlich, warum man einen Anteil mal auf das Ganze und mal auf einen Teil bezieht – Warum „heißt“ ein Kästchen mal  $1/8$  und mal  $1/40$  (s. Abb. 3)? Anteile werden nicht inhaltlich gedeutet und der Ansatz läuft Gefahr, Kalkül (wie „Zähler•Zähler / Nenner•Nenner“) zu werden. So liegt es nahe, zunächst ein umfassendes Verständnis von der für die Multiplikation so wichtigen Anteil-vom-Anteilsbildung aufzubauen.

#### **4. Ausblick: Erste Ideen für eine Lernumgebung**

Eine Idee von Winter (1999) aufgreifend, sollen Anteile von wechselnden Bezugsgrößen betrachtet werden, wobei eine Darstellung ähnlich der Vierfeldertafel genutzt wird. Diese Aufgaben sollen die Bildung von Anteilen als wirklich wissenswert und wichtig erfahren lassen und sie in einen außermathematischen Kontext stellen, damit der Sinn der im Alltag wichtigen doppelten Anteilsbildung anhand verknüpfter Merkmale erfahrbar gemacht werden kann. Es soll erkannt werden können, dass es entscheidend ist, auf welche Größe man sich genau bezieht und dass es einen Unterschied macht, ob man den „Anteil vom Ganzen“ oder den „Anteil vom Teil eines Ganzen“ betrachtet.

#### **Literatur**

- Affolter, W. / Amstad, H. / Doebeli, M. / Wieland, G. (2004<sup>2</sup>): Das Zahlenbuch 6. Zug: Klett und Balmer.
- Fischbein, E. / Deri, M. / Nello, M. S. / Marino, M. S. (1985): The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. In: *Journal of Research in Mathematics Education*, 16, S.3-17.
- Kattmann, U. / Gropengießer, H. (1996): Modellierung der didaktischen Rekonstruktion. In: Duit, R. / von Rhöneck, Ch. (Hrsg.): *Lernen in den Naturwissenschaften*, Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel, S. 180-204.
- Malle, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: *Mathematik lehren* 123, S. 4-8.
- Padberg, F. (2002<sup>3</sup>): *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum-Verlag.
- Prediger, S. (2008): The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. In: *Learning and Instruction*, 18 (1), 3-17.
- Sinicrope, R. / Mick, H. (1992): Multiplication of fractions through paper folding. In: *Arithmetic Teacher* 2, S. 116-121.
- Wartha, S. (2007): *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim / Berlin: Franzbecker.
- Winter, H. (1999): Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung, Manuskript (<http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/37/bruchrechnung.pdf>; abgerufen am 28.3.2008).