Wolfgang SCHLÖGLMANN, Linz

Die Bedeutungsentwicklung mathematischer Konzepte und die Entstehung von Affekt

Vorbemerkung

Wenn man mit Erwachsenen über ihr Verhältnis zur Mathematik und ihre Erfahrungen mit dem Mathematikunterricht spricht, so hört man oft sehr emotionale Berichte, die von positiven Erzählungen über erfolgreiches Lösen von Mathematikaufgaben bis hin zu Schilderungen von noch immer auftretenden Albträumen in Zusammenhang mit Mathematikprüfungen reicht. Um Studierende für Probleme in Zusammenhang mit elementarer Algebra zu sensibilisieren, stelle ich diesen die Aufgabe einem Erwachsenen ein einfaches Problem zur Variablenverwendung vorzulegen und den Problemlöseprozess zu dokumentieren. Neben dem bekannten „Rosnick-Clement Effekt“ (Rosnick & Clement, 1980) treten beim Bearbeiten der Aufgabenstellung typische, aus der Literatur bekannte, Fehler auf. Darüber hinaus finden sich in den Protokollen auch immer wieder emotionale Äußerungen, wie „ich konnte Mathe noch nie leiden“, „oh je Mathematik, ob ich das kann“ oder „dann muss ich schauen, was x ist. O Gott mir wird schlecht“.

Da Affekte, wie Einstellungen (beliefs), Haltungen (attitudes) und Emotionen, um die von McLeod (1992) vorgeschlagenen Kategorien von Affekten zu verwenden, Konsequenzen eines evolutionären Prozesses des Lernens und Umganges mit Mathematik sind, ist es nahe liegend zu fragen, welchen Einfluss die „Natur der Mathematik“ auf deren Entstehung hat.

Spezifika des mathematischen Lernprozesses

Wenn man mit erwachsenen Personen über deren Schwierigkeit mit Mathematik spricht, so meinen diese meist, dass sie Mathematik nicht verstanden hätten. Das bedeutet, dass sie dem Verstehensprozess beim Mathematiklernen eine besondere Bedeutung beimessen. Die mathematikdidaktische Forschung hat sich natürlich mit dieser Frage intensiv beschäftigt (Sierpinska, 1994). Für Mogens Niss (2006) sind in diesem Zusammenhang zwei Forschungsergebnisse wichtig. Einerseits die Unterscheidung von „Konzeptdefinition“ und „Konzeptvorstellungen“, wobei mit der Konzeptdefinition die formale Definition gemeint ist, während die Konzeptvorstellung alle bei einem Individuum zum Konzept vorhandenen Darstellungen und Eigenschaften umfasst, die weder kohärent noch konsistent sein müssen. Wichtig ist es anzumerken, dass vor allem die Konzeptvorstellungen das Umgehen mit dem mathematischen Konzept bestimmen. Das zweite wichtige Ergebnis betrifft den Prozess der

„Verdinglichung“ (Reification). Bei diesem Vorgang wird ein Prozess zu einem Objekt das nun, infolge des Objektnamens oder Zeichens für das Objekt, im Rahmen eines Diskurses als Einheit verwendet werden kann (Sfard, 1991). Dieser für die Herausbildung mathematischer Konzepte so wesentliche Vorgang geht in drei Stufen vor sich, der Interiorisation, der Kondensation und der Reifikation. Auf der ersten Stufe ist die lernende Person in der Lage die zugrunde liegenden Prozesse gut und sicher zu bewältigen. Die zweite Stufe dient dazu alle zugehörigen Operationen zu kleineren und überschaubareren Einheiten zusammenzufassen und auf der dritten Stufe findet eine ontologische Verschiebung statt und es entsteht die Fähigkeit den bisher bereits vertrauten Begriff in einem neuen Licht zu sehen (Sfard, 1991). Sfard (1991) sieht in diesem Vorgang auch den Übergang von einem operationalen zu einem strukturellen Konzept. Wichtig ist es dabei zu beachten, dass das durch Reifikation entstandene Objekt wieder Ausgangspunkt für einen neuen Reifikationsprozess sein kann. Nun weiß man aus zahlreichen Untersuchungen, wie auch aus Berichten von Lehrkräften, dass bei manchen Lernenden der Reifikationsprozess nicht oder nicht ausreichend erfolgt. Diese Lernenden, die nur über ein operationales Konzept, aber nicht über ein strukturelles Konzept verfügen, sind meist auch nicht mehr in der Lage den Erklärungen der Lehrkraft zu folgen, da diese ein strukturelles Konzept voraussetzen. Solche Lernende verfügen oft über ein sogenanntes „pseudostrukturelles“ Konzept (Sfard & Linchevski, 1994). Dabei werden Zeichen zum Ding an sich, d. h. Zeichen sind auch gleichzeitig das Bezeichnete und verweisen nicht mehr auf etwas anderes. Ich möchte dies an einem Beispiel verdeutlichen. Einem Erwachsenen wurde folgende Aufgabe vorgelegt:

In einem Autobus sind unter den Fahrgästen F Frauen und M Männer. Es sind drei Frauen mehr als Männer im Bus. Drücken Sie den Zusammenhang zwischen F und M in einer Gleichung aus.
Der Erwachsene lässt sich nach einigem Zögern überreden die Aufgabe zu probieren und schreibt nach dem Lesen der Aufgabe: x = ...
Darauf fragt der Interviewer: Woher kommt das x?
Antwort: Naja, wenn ich eine Gleichung schreiben muss, dann brauch’ ich doch irgendwo ein x.

Hier zeigt sich, dass diese Person nicht über ein strukturelles Konzept von Gleichung verfügt, sondern, dass das Konzept von Gleichung mit einer spezifischen Form verbunden ist in der das Zeichen x vorkommen muss.

Bedeutungsveränderung mathematischer Konzepte und die Entstehung von Affekt

Wie im vorangegangenen Abschnitt kurz angedeutet, kommt es im Verlaufe des Mathematikunterrichts bei mathematischen Konzepten zu Bedeutungsveränderungen. So werden z. B. Rechenoperationen zuerst nur als Algorithmen behandelt, später aber rücken ihre strukturellen Eigenschaften ins Blickfeld. Zahlen werden nicht mehr nur als Rechenobjekte gesehen, sondern auch im Hinblick auf Teilbarkeit untersucht. Was eine Zahl ist, erfährt durch Zahlenbereichserweiterungen eine ständige Veränderung. Wichtig ist es anzumerken, dass die „alten" Konzeptvorstellungen und Konzeptbilder durch diese Veränderungen nicht falsch werden, sie reichen nur nicht mehr aus die neuen Aufgabenstellungen und Fragen zu beantworten bzw. zu verstehen. In diesem Sinne können sie zu „Hindernissen" (epistemological obstacles (Sierpinska, 1994)) für das Denken werden. Für die Lernenden bedeutet dies eine verwirrende Situation. Ihre Konzeptvorstellungen führen in bestimmten Situationen zu richtigen Lösungen für bearbeitete Aufgaben, während sie in anderen Situationen falsche Ergebnisse liefern, und sie haben keine Erklärung, warum dies so ist. Dies führt zu Auswirkungen wie Beliefs über Mathematik und sie selbst als Mathematiklernende (Schlöglmann, 2008), zu Mathematikangst, Mathematikvermeidungsstrategien als Erwachsene, aber auch zu spezifischen Lernstrategien, bei denen nicht mehr versucht wird mathematische Inhalte zu verstehen, sondern den Blick auf die Form und den Ablauf von Verfahren zu richten. Eine Lernstrategie, die ich als Mathematiklernen ohne Verstehen bezeichnet habe (Schlöglmann, 2007a) und die auf einem pseudostrukturellen Konzept der lernenden Person beruht (Sfard & Linchevski, 1994). Es sei noch darauf hingewiesen, dass die oftmals bei Lernenden vorhandene Mathematikangst vor allem in Prüfungssituationen negative Auswirkungen hat, da durch die Beschränktheit der Kapazität des Arbeitsgedächtnisses die Fehlerhäufigkeit steigt (Schlöglmann, 2007b).

Was kann nun die Konsequenz dieser Überlegungen sein? Eine Schlüsselstellung im Mathematiklernprozess nehmen die Situationen ein, in denen es zu Bedeutungserweiterungen oder Bedeutungsveränderungen mathematischer Konzepte kommt. Diese Schritte im Lernprozess bedürfen einer sorgfältigen Planung, sowie eines besonders vorsichtigen Vorgehens im Unterricht verbunden mit einem mehrmaligen Überprüfen, ob von den Lernenden die Konzeptveränderung in adäquater Weise vorgenommen wurde. An dieser Stelle ist eine Individualisierung bzw. Differenzierung im Unterricht besonders angebracht. Fördernd für die Entwicklung pseudostruktureller Konzepte erscheint hier ein zu frühes Übergehen zu Verfahren, da dies die Orientierung an Form und Abläufen von Beispielbearbeitungen nach sich ziehen kann. Es sei noch darauf hingewiesen, dass natürlich auch Lehrkräfte wissen, dass manche ihrer SchülerInnen über keine hinreichenden Konzepte verfügen, diese Lernenden verstehen Mathematik eben nicht. Um diesen Lernenden zu helfen werden dann in Prüfungssituationen Aufgaben gestellt, die es ihnen erlauben mit ihren pseudostrukturellen Konzepten Erfolg zu haben und so zu positiven Ergebnissen bei Prüfungsarbeiten zu kommen (Schlöglmann, 2007a).

Literatur

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. G. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: McMillan.

Niss, M. (2006).The Structure of Mathematics and its Influence on the Learning Process. In: J. Maaß & W. Schlöglmann (Eds.). *New Mathematics Education Research and Practice.* Rotterdam. SensePublishers. 51 – 62.

Rosnick, P. C. & Clement, J. (1980): Learning without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior 3/1*, 3 – 27.

Schlöglmann, W. (2007a). Mathematics Learning Without Understanding – Cognitive and Affective Background and Consequences for Mathematics Education. In: C. Bergsten, B. Grevholm, H. Stromskag Masoval and F. Ronning (Eds.): *Relating Practice and Research in Mathematics Education.* Proceedings of NORMA05. Trondheim. Tapir Academic Press, 441 – 453.

Schlöglmann, W. (2007b). Student Errors in Task-Solving Processes. In: D. Pitta-Pantazi and G. Philippou (Eds.): *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* University of Cyprus 2007, 359 – 368.

Schlöglmann, W. (2008). Beliefs Concerning Mathematics Held by Adult Students and their Teachers. Appears in: *Proceedings of MAVI 12***.**

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22(3),* 1 – 36.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The Gains and the Pitfalls of Reification – The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics 26(3),* 191 – 228

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London. The Falmer Press.