Fritz SCHWEIGER, Universität Salzburg

Mathematik als Kulturgut

In den letzten Jahren sind einige Romane erschienen, deren Hintergrund durch mathematische Probleme bestimmt ist. Ich denke an *Onkel Petros und die Goldbachsche Vermutung* von Doxiadis und *Die Riemannsche Vermutung* von Næss oder auch an *Die Vermessung der Welt* von Kehlmann. Diese Romane sind wohl ohne Kenntnis der damit verbundenen mathematischen Probleme lesbar, aber wäre es nicht für jeden Leser, jede Leserin spannender auch etwas mehr zu wissen? Die Erinnerung an die Schulzeit, an langweilig erscheinende Übungen oder an die Furcht, beim nächsten Test zu versagen, wird keine gute Brücke sein. Der Mathematikunterricht wird und muss seine Zielsetzungen neu bedenken. Die veränderte technologische, aber arbeitsteilige Gesellschaft bedingt dies. Der Mathematikunterricht muss daher vor allem jenen Menschen, die später keine mathematischen Techniken verwenden, helfen, Mathematik als integralen Bestandteil unserer Kultur zu begreifen. Der auch von László Lovász in seinem Hauptvortrag *Trends in Mathematics, and how they Change Education* genannte Vorschlag eines "expository teaching" ist zu überlegen. Der nachstehende Beitrag soll die These, dass eine Ausrichtung an „fundamentalen Ideen" (Schweiger 2006) hilfreich sein kann, am Beispiel der Riemannschen Vermutung illustrieren.

Eine fundamentale Idee wird mit *Erkennen von Mustern* beschrieben. Dies führt auf verschiedenen Wegen zu Primzahlen. Ein Weg ist das Legen von Zahlen als Rechteckmuster. Die Zahl 6 kann als „echtes" Rechteck gelegt werden, etwa $6 = 2 \times 3$, aber die Zahl 7 ergibt kein „echtes" Rechteck. Ein anderer Weg wird durch das Sieb des Eratosthenes beschrieben. Man schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis N in ihrer natürlichen Reihenfolge auf $1, 2, 3, 4, ..., N$. Sodann streiche man die 1 und die echten Vielfachen von 2, im nächsten Schritt die echten Vielfachen von 3 usw. Die Zahlen, die übrigbleiben, sind die Primzahlen $\leq N$. Dabei braucht man das Verfahren nur etwa bis $\sqrt{N}$ durchzuführen. Was auffällt, ist das *unregelmäßige Muster* der Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...$, dessen Geheimnisse bei weitem nicht alle entschlüsselt sind. Da die Primzahlen aber doch seltener zu werden scheinen, ist die Frage berechtigt, ob es deren unendlich viele gibt. Für den Zweck der heuristischen Erschließung der ζ-Funktion ist es nützlich, einen anderen Beweis als den Beweis nach Euklid zu verwenden. Dieser beruht auf der Tatsache, dass jede natürliche Zahl in 1-deutiger Weise als Produkt von Primzahlen geschrieben werden kann. Daher ist für $s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\alpha s}} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

(soweit man Sätze über absolut konvergente Reihen vertrauensvoll anwendet).
Wäre die Anzahl der Primzahlen <u>endlich</u>, so sollte dieser Zusammenhang auch für $s = 1$ richtig sein, was aber nicht stimmen kann, da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist.

Der nächste Schritt war für das 19. Jahrhundert sehr logisch. Man betrachtete nun

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s = \sigma + it.$$

Diese Reihe ist für $\sigma > 1$ ebenfalls konvergent, d. h. $\zeta(s)$ ist in der Halbebene $\sigma > 1$ wohldefiniert. Dies ist analog zur Festsetzung

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z = x + iy.$$

(fundamentale Idee *erkenntnisleitender Muster*).

Hier ist die Idee des *Erweiternden Umdefinierens* hilfreich. Die zunächst nur für $|z| < 1$ definierte Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist dank der Summenformel für die geometrische Reihe gleich $\frac{1}{1-z}$ und dies ist eine Funktion, die für alle $z \neq 1$ definiert ist. Die Funktion $\hat{f}(z) = \frac{1}{1-z}$, ist also eine *Fortsetzung* von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$.
Fortsetzungen von Funktionen sind nicht eindeutig. Die Funktion $f(x) = x$ für $x > 0$ gestattet viele Fortsetzungen. Es könnte ein Stück von $\hat{f}(x) = x, x \in \mathbb{R}$ sein, aber auch $\hat{f}(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ würde passen. Die Funktion $\hat{f}(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\hat{f}(x) = x^3 + x$ für $x \leq 0$ ist auch differenzierbar! Unter allen Fortsetzungen von $\zeta(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ gibt es aber eine einzige privilegierte Fortsetzung, nämlich eine Fortsetzung $\hat{\zeta}(s)$, die auf der Halbebene $\sigma > 0$ mit Ausnahme des Punktes $s = 1$, *analytisch* ist.

Die Darstellung

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + s\int_1^{\infty} \frac{[t] - t}{t^{s+1}} dt$$

ist für $\sigma > 1$ richtig, aber das Integral rechts ist auch für $\sigma > 0$ wohldefiniert. Daher hat man eine Fortsetzung der ζ-Funktion auf einen größeren Bereich gefunden.

Die Riemannsche Vermutung besagt nun: Ist $\zeta(s) = 0$, $0 < \sigma < 1$, so ist $s = \frac{1}{2} + it$. Im Originaltext von Riemann heißt es: „Man findet in der That etwa soviel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hievon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.“ (Riemann 1990:148). Dazu muss man wissen, dass Riemann die Nullstellen im Streifen $0 < \sigma < 1$ in der Form $s = \frac{1}{2} + it$ angeschrieben hat, wobei t noch eine weitere komplexe Zahl und Nullstelle einer Hilfsfunktion ist. Die Vermutung, dass diese Nullstellen t alle reell seien, bedeutet daher genau, dass die Nullstellen der ζ-Funktion im Streifen $0 < \sigma < 1$ auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen.

Die Bedeutung dieser Vermutung ist allerdings schwieriger zu vermitteln! Denn sei

$$\pi(x) = \#\{p : p \leq x\},$$

so vermuteten Gauss und Legendre, dass

$$\pi(x) \sim \frac{x}{logx}$$

gilt. Später hat man gesehen, dass die Funktion $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ noch bessere Abschätzungen liefert. Bewiesen wurde dieser Satz (der „Primzahlsatz“) erst von Hadamard und de la Valleé-Poussin.
Der Zusammenhang mit der Lage der Nullstellen kann an Hand des nachfolgenden Satzes deutlich gemacht werden. Dazu sind noch einige Definitionen nötig. Man setze $\Lambda(n) = \log p$, wenn $n = p^k$ und $\Lambda(n) = 0$ sonst und weiters $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$. Aber woher kommt plötzlich diese neue Funktion? Der Schlüssel ist die Beziehung

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Weiters ist die Abkürzung $f(x) = g(x) + o(x^\alpha)$ für den Sachverhalt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - g(x)}{x^\alpha} = 0$$

nützlich.

Ist $\rho = \sigma + it$ eine Nullstelle mit $\frac{1}{2} \le \sigma < 1$, dann ist die Abschätzung $\psi(x) = x + o(x^\sigma)$ falsch. Für den Unterschied $\pi(x) - \frac{x}{logx}$ gibt es sehr wohl Abschätzungen, aber mit Hilfe der Riemannschen Vermutung ließe sich der Unterschied auf etwa $\sqrt{x}logx$ verkleinern. Aber da fragt der Outsider wohl zu recht: Ja, ist denn die Verkleinerung des Unterschiedes so wichtig?

Auch das *Abschätzen von Fehlern* ist eine mathematische Grundtätigkeit. Ist ein Resultat x auf $\pm x$ genau, so liegt $x = 100$ zwischen 0 und 200. Ist die Genauigkeit aber $\pm\sqrt{x}$, dann liegt $x = 100$ zwischen 90 und 110.

Tatsächlich hat die ζ-Funktion jede Menge Nullstellen. Die zur x-Achse nächste in der oberen Halbebene ist $\rho_1 = \frac{1}{2} + i14,13472....$

Informationen zu diesem Thema gibt es reichlich. Ein mathematisch anspruchsvoller Klassiker ist Edwards 1974. Ein Text anderer Art, der an Hand der Erforschung der Primzahlen einen unterhaltsamen (gelegentlich etwas phantasievoll anmutenden) Einblick in die Geschichte der Mathematik bieten will, ist Du Sautoy 2007.

Das Verständnis der Riemannschen Vermutung ist anspruchsvoll. Das Goldbachsche Problem ist viel einfacher zu erklären: Jede gerade ganze Zahl $n \ge 4$ ist Summe von zwei Primzahlen. Man überzeugt sich mühelos von der Richtigkeit dieser Behauptung, etwa $30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17$. Es ist eher schwer zu glauben, dass diese Behauptung noch immer unbewiesen ist. Es gibt ja viele ähnlich klingende Behauptungen, wie etwa, dass jeder Kubus Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ist: $1^3 = 1, 2^3 = 3 + 5, 3^3 = 7 + 9 + 11, 4^3 = 13 + 15 + 17 + 19, ...$ Diese Formeln sind so suggestiv, so dass vielleicht begabte Schüler den Beweis entdecken könnten. Viel schwieriger ist es aber zu zeigen, dass jede natürliche Zahl Summe von höchstens 9 Kuben ist und auch die Zahl 9 nicht verbessert werden kann, denn es ist $23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$ (siehe etwa Reid 2006).

Literatur

Doxiadis, Apostolos 2001: *Onkel Petros und die Goldbachsche Vermutung.* Lübbe

Du Sautoy, Marcus 2007: *Die Musik der Primzahlen : Auf den Spuren des größten Rätsels der Mathematik.* 3. Aufl. München : Dt. Taschenbuch-Verl.

Edwards, Harold M. 1974: *Riemann's Zeta Function* New York, NY [u.a.] : Academic Press

Kehlmann, Daniel 2005: *Die Vermessung der Welt.* Rowohlt

Næss, Atle 2007. *Die Riemannsche Vermutung.* Piper

Reid, Constance 2006: *From Zero to Infinity. What Makes Numbers Interesting.* Wellesley: A. K. Peters

Riemann, Bernhard 1990: *Gesammelte Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge.* Nach der Ausgabe von Heinrich Weber und Richard Dedekind neu hrsg. von Raghavan Narasimhan. Berlin: Springer und Leipzig: Teubner.

Schweiger, Fritz 2006: Fundamental Ideas: A Bridge between Mathematics and Mathematical Education. In J. Maasz & W. Schlöglmann eds: *New Mathematics Education Research and Practice.* Rotterdam/Taipei: Sense Publishers 2006 p. 63-73