

Operationsverständnis und Grundvorstellungen in Klasse 3 – Literaturanalyse und Interviewstudie

1 Einleitung

In diesem Beitrag werden zunächst die historischen Entwicklungslinien der beiden Konstrukte „Operationsverständnis“ sowie „Grundvorstellungen“ herausgearbeitet und zueinander in Beziehung gesetzt. Anschließend werden in einer empirischen Untersuchung die Ausprägungen dieser Konstrukte bei Drittklässlern erfasst.

2 Entwicklungslinien und Definitionen

Operationsverständnis und Grundvorstellungen sind gängige Schlagworte in der Mathematikdidaktik. Doch worauf gehen sie zurück und wie werden sie heute definiert?

2.1 Operationsverständnis

Der Begriff Operationsverständnis ist relativ jung, jedoch beziehen sich die meisten Autoren auf Grundlagen, die bereits in der Mitte des letzten Jahrhunderts von Bedeutung waren, unter anderem Piaget (1967), Aebli (1961), Bruner (1971) und Bauersfeld (1972). Neben Aebli, dessen Ansatz als didaktisches Modell zur Umsetzung im Unterricht gilt, kommt vor allem Bruner eine wichtige Rolle zu, prägte er doch die Begriffe enaktiv – ikonisch – symbolisch als Repräsentationsformen, die auch in der heutigen Mathematikdidaktik noch von Bedeutung sind. Eine weitere wichtige Grundlage bildet Bauersfeld, der mit seinem intermodalen Transfer auf die Wechselwirkungen der Repräsentationsformen hinweist. Aus diesen Grundlagen entwickelten sich in den letzten Jahren zwei Definitionsansätze.

Gerster und Schultz (2004, S. 351 ff.) beziehen sich in ihrer Definition des Operationsverständnisses auf Huinker (1993) und Van de Walle (1994). Operationsverständnis ist demnach die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Darstellungsformen (konkrete Sachsituation, modell- oder bildhafte Darstellung, symbolische Darstellung) hin und her wechseln zu können. Wenn die Übersetzungen zwischen allen Repräsentationsformen in beiden Richtungen funktionieren, spricht man von einem vollständig ausgebildeten Operationsverständnis. Die enaktive Darstellung, die Bruner (1971) aufführt, tritt bei Gerster und Schultz (2004) nicht explizit auf, aufgrund der möglichen Aufgabenstellungen wird aber deutlich, dass sie der Repräsentationsform „Modell/Bild“ zugeordnet werden kann. Zusätzlich zu den Rep-

räsentationsformen Bruners taucht bei Gerster und Schultz der Sachkontext auf, woran deutlich wird, dass ein ausgebildetes Operationsverständnis nicht nur rein innermathematische Aspekte erfasst, sondern auch die außermathematische Lebenswelt berücksichtigt.

Die Definition von Bönig (1995, S. 60 ff.) bezieht sich ganz deutlich auf Bruner (1971). Es treten prinzipiell dieselben Repräsentationsmodi auf, mit dem Unterschied, dass die symbolische Darstellung in Symbol und Sprache unterteilt ist. Anders als bei Gerster und Schultz (2004) ist ein Sachkontext nicht auf den ersten Blick ersichtlich, er zeigt sich jedoch in den Beispielaufgaben.

2.2 Grundvorstellungen

Das Grundvorstellungskonzept besitzt in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition, teilweise auch unter anderen Bezeichnungen und mit abweichenden Bedeutungen (vgl. vom Hofe, 1995, S. 15 ff.). Erste Ansätze dazu finden sich schon bei Pestalozzi, über Kühnel, Oehl und Griesel fand dann eine kontinuierliche Weiterentwicklung statt. Grundvorstellungen haben sich demnach im Lauf der Jahrhunderte im Zuge einer Auseinandersetzung zwischen Theorie und Praxis herausgebildet und können heute wie folgt gefasst werden: „Grundvorstellungen beschreiben Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung.“ (Vom Hofe, 1996, S. 6). Sie gelten als Mittler zwischen Mathematik, Individuum und Welt. Besonders bedeutsam sind dabei die Aspekte Sinnkonstituierung, Aufbau psychologischer Repräsentationen und Anwendung. Grundvorstellungen bilden demnach die Basis für inhaltliches Lernen, ohne ihre vermittelnde Funktion stehen sich Zahlenwelt und Realität beziehungslos gegenüber. Vor allem die beiden Aspekte Sinnkonstituierung und Aufbau psychologischer Repräsentanten scheinen für ein gut ausgebildetes Operationsverständnis von Bedeutung zu sein, da sie auf die Begriffsbildung und Verinnerlichung zielen, Fähigkeiten, die beim Übersetzen zwischen verschiedenen Repräsentationsformen benötigt werden.

Ein enger gefasster Teil des Grundvorstellungskonzepts findet sich bei Gerster und Schultz (2004, S. 354 ff.), Radatz (1996) oder auch Padberg (2005). Sie verstehen unter Grundvorstellungen verschiedene Handlungsmöglichkeiten einer Rechenoperation, die durch unterschiedliche Sachsituationen charakterisiert werden können. Grundvorstellungen der Addition sind demnach z.B. das Verändern einer Menge oder das Zusammenfügen zweier verschiedener Mengen. Während der Definitionsansatz von Vom Hofe weitaus umfassender ist, geben die enger gefassten Definitionsansätze Anregungen für das unterrichtliche Handeln. Darüber hinaus finden sich

auch hier Anknüpfungspunkte zum Operationsverständnis, da die Übersetzungsprozesse auch hinsichtlich der vom Schüler gezeigten Grundvorstellung betrachtet werden können. So ergeben sich hier mögliche Fragen nach der Art der gezeigten Grundvorstellungen.

3 Empirische Befunde

Im Bereich des Operationsverständnisses gibt es zahlreiche Untersuchungen, die Teilaspekte betrachten, aber nur wenige, die möglichst vielfältige Übersetzungsprozesse berücksichtigen. Bönig (1995) untersucht in Klasse 4 sieben mögliche Übersetzungen bezüglich der Multiplikation und Division. Sie kommt zu dem Ergebnis, dass die Hauptschwierigkeiten bei Aufgaben liegen, die Übersetzungen von der Symbolform weg in eine andere Darstellungsform verlangen. Auch fällt es vielen Schülern schwer, Handlungen zu mathematisieren. Sie weist jedoch auch darauf hin, dass es zwischen den Schülern deutliche Unterschiede gibt. Schäfer (2005) bezieht sich auf rechenschwache Hauptschüler und betrachtet nur zwei mögliche Übersetzungen, diese jedoch bezüglich aller vier Grundrechenarten. Sie kommt zum Ergebnis, dass das Operationsverständnis bezüglich Addition und Subtraktion bei den untersuchten Schülern deutlich besser ausgebildet ist, als das Operationsverständnis bezüglich Multiplikation und Division.

4 Eigene Voruntersuchung und erste Ergebnisse

Im Zuge einer eigenen Voruntersuchung wurden im zweiten Schulhalbjahr in einer dritten Klasse alle 22 Schüler einzeln interviewt. Alle Interviews beinhalteten 5 verschiedene Übersetzungen und alle vier Grundrechenarten. Die auf Video aufgezeichneten Interviews wurden anschließend unter Berücksichtigung zweier verschiedener Fragestellungen ausgewertet.

4.1 Operationsverständnis bei Grundschulern

In einer ersten Frage ging es darum, herauszufinden, wie das Operationsverständnis bei Grundschulern ausgeprägt ist. Diese Frage zielt auf das Gelingen der Übersetzungsprozesse. Die Ergebnisse sind hierbei sehr vielfältig. Neben Schülern, die scheinbar jede Übersetzung mühelos bewältigen, finden sich auch Schüler, denen die Aufgabenstellungen sichtlich Schwierigkeiten bereiten. Trotz der sehr unterschiedlichen Übersetzungsleistungen zeigen sich aber einige wesentliche Problemfelder: Die größten Schwierigkeiten zeigten sich bei Aufgaben, die eine inhaltliche Deutung mathematischer Ausdrücke verlangten (vom Symbol weg, hin zu Bild oder Handlung). Auffällig hierbei ist, dass diese Übersetzungen jeweils nur in eine Richtung sehr gut funktionieren, die Rückübersetzung aber nicht gelingt.

Auch stellte sich heraus, dass die Aufgaben mit multiplikativer Struktur den Schülern die größten Schwierigkeiten bereiteten. Die Befunde von Bönig (1994) und Schäfer (2005) wurden bestätigt.

4.2 Grundvorstellungen hinter den Schülerlösungen

Die Auswertung dieser zweiten Frage orientierte sich an den Grundvorstellungen im Sinne von Gerster und Schultz (2004, S. 355). Sie geht über die Frage nach dem Gelingen der Übersetzungsprozesse hinaus und zielt auf die dahinter stehenden Grundvorstellungen. Auffällig war hierbei, dass sich nur ein Teil der Schülerlösungen bestimmten Grundvorstellungen zuordnen ließ. Daneben gab es Schülerlösungen, bei denen die Grundvorstellung nicht eindeutig erkennbar war. Sehr viele Lösungen zeigten anstelle von Grundvorstellungen Rechenstrategien, Verbalisierungen sowie ikonische oder enaktive Darstellungen der vorgegebenen Aufgaben. Daraus zu schließen, die Schüler verfügen nicht über inhaltliche Grundvorstellungen, wäre jedoch falsch, vielmehr muss nun verstärkt danach gefragt werden, wie es gelingt, die hinter den Übersetzungen stehenden Grundvorstellungen sichtbar zu machen, d.h. wie entsprechende Aufgaben gestaltet werden müssen, um dies zu erfassen.

Literatur

- Aebli, Hans (1961): Grundformen des Lehrens. Stuttgart: Klett
Aebli, Hans (1987³): Zwölf Grundformen des Lehrens. Stuttgart: Klett
Bönig, Dagmar (1995): Multiplikation und Division: Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschulern. Münster: Waxmann
Bruner, Jerome S. (1971): Studien zur kognitiven Entwicklung. Stuttgart: Klett
Gerster, Hans-Dieter und Schultz, Rita (2004): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Freiburg im Breisgau
Padberg, Friedhelm (2005³): Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Spektrum
Radatz, Hendrik und Schipper, Wilhelm (1996): Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr. Hannover: Schrödel
Schäfer, Jutta (2005): Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule. Hamburg: Verlag Dr. Kovac
Vom Hofe, Rudolf (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum
Vom Hofe, Rudolf (1996): Grundvorstellungen – Basis für inhaltliches Denken. In: Mathematik lehren (78), S. 4-8