Grozio STANILOV Dobrich, Galina PANAYOTOVA Burgas,
Slavka SLAVOVA Dobrich

MULTIPLIKATION VON KURVEN ZWEITER ORDNUNG

In der vorliegenden Arbeit definieren wir die Operation „Multiplikation“von Kurven zweiter Ordnung.Die Kurven sind beim einem festen Koordinatensystem gegeben und das Produkt auch beim demselben. Dazu verwenden wir die Computer Algebra MAPLE.Damit wollen wir die grossen Moeglichkeiten von Maple zeigen.

I. Produkt von zwei Kurven. Ist $A = (a_{ij})$ eine Matrix der Ordnung 3,die entsprechende Kurve zweiter Ordnung hat Gleichung

$$a := a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})x + (a_{23} + a_{32})y = 0\,.$$

Genau so ist $B = (b_{ij})$ eine solche Matrix, die entsprechende Kurve zweiter Ordnung hat Gleichung

$$b := b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33} + (b_{12} + b_{21})xy + (b_{13} + b_{31})x + (b_{23} + b_{32})y = 0$$

Bezeichne $F = A.B$ mit Elementen $F = (f_{ij})$.Die Kurve mit der Gleichung

$$f := f_{11}x^2 + f_{22}y^2 + f_{33} + (f_{12} + f_{21})xy + (f_{13} + f_{31})x + (f_{23} + f_{32})y = 0\,,$$

nennen wir Produkt der beiden Kurven und bezeichnen wir $f = a.b$.

Satz 1.Das Produkt von zwei Kurven mit symmetrischen Matrizen ist kommutativ:

$$a.b = b.a\,.$$

Beweis . Wir benutzen die Computer Algebra MAPLE. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

beliebige Matrizen der Ordnung 3. Die Elemente der Matrix $F = A.B$ sind:

$f_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}, f_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}, f_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$
$f_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}, f_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}, f_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$
$f_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}, f_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}, f_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$

In analogischer Weise,die Elemente der Matriz $K = B.A$ sind:

$k_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31}, k_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32}, k_{13} = b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33}$
$k_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31}, k_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32}, k_{23} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33}$
$k_{31} = b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31}, k_{32} = b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32}, k_{33} = b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33}$

Die Kurve, die durch die Matrizx $F = A.B$ bistimmt ist, hat Gleichung:

$$f := f_{11}x^2 + f_{22}y^2 + f_{33} + (f_{12} + f_{21})xy + (f_{13} + f_{31})x + (f_{23} + f_{32})y = 0$$

Die Kurve, die durch die Matrix $K = B.A$ bistimmt ist, hat Gleichung

$$k := k_{11}x^2 + k_{22}y^2 + k_{33} + (k_{12} + k_{21})xy + (k_{13} + k_{31})x + (k_{23} + k_{32})y = 0$$

Im Falle $a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{32} = a_{23}, b_{21} = b_{12}, b_{31} = b_{13}, b_{32} = b_{23}$ bekommen wir $f - k = 0$. Damit ist der Satz1 bewiesen.

Satz 2.Das Produkt von Kurven ist assoziativ:

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

wo

$c = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33} + (c_{12} + c_{21})xy + (c_{13} + c_{31})x + (c_{23} + c_{32})y = 0$
ist.
Der Beweis geht in analogischer Weise.Wir berechnen die Elemente der Matrizen $H = F.C, G = B.C, J = A.G$ - h_{ij}, g_{ij}, j_{ij} .Die Kurve $h = (a.b).c$ hat Gleichung

$$h := h_{11}x^2 + h_{22}y^2 + h_{33} + (h_{12} + h_{21})xy + (h_{13} + h_{31})x + (h_{23} + h_{32})y = 0$$

und entsprechend - die Kurve $j = a.(b.c)$ hat Gleichung

$$j := j_{11}x^2 + j_{22}y^2 + j_{33} + (j_{12} + j_{21})xy + (j_{13} + j_{31})x + (j_{23} + j_{32})y = 0$$

Im Falle $a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{32} = a_{23}, b_{21} = b_{12}, b_{31} = b_{13}, b_{32} = b_{23}, c_{21} = c_{12}, c_{31} = c_{13}, c_{32} = c_{23}$, bekommen wir $h - j = 0$.

Damit ist der Satz 2 bewiesen.
Bemerkung. Die Rechnungen sind ziemlich umfangreich, aber mit Maple alles geht auf einmal sehr schnell und macht Vergnuegen und Spass.
Satz 3. Das Quadrat jeder nicht entarteten Kurve ist immer eine imaginere Ellipse.
Beweis.Ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

eine beliebige symmetrische Matrix,die entsprechende Kurve ist

$$a = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0.$$

Die Elemente der Matriz $C = A^2$ sind:

$$c_{11} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2, c_{12} = a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23}, c_{13} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33}$$

$$c_{21} = c_{12}, c_{22} = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2, c_{23} = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33}$$

$$c_{31} = c_{13}, c_{32} = c_{23}, c_{33} = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2.$$

Offenbar

(1) $$c_{11} + c_{22} > 0$$

Wir berechnen

$$.C_{33} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})^2 + (a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2.$$

Daraus folgt

(2) $$C_{33} > 0$$

wenn $\det(A) \neq 0$.
Da $\det(C) = \det(A)^2$,es folgt

(3) $$\det(C) > 0.$$

Aus (10), (2),(3) folgt Satz 3 [1].
Satz 4. Der imaginere Einheitskreis spielt Rolle einer Einheit.
Beweis.Die Matrix der Kurve

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

ist die Einheitsmatrix E .Da

$$A.E = E.A = A$$

folgt der Satz 4.

II. **Umkehrung von Kurve**. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

eine beliebige symmetrische regulaere Matrix.Die entsprechende Kurve zweiter Ordnung ist

$$a = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0.$$

Es sei $A^{-1} = (A_{ij})$ die inverse Matrie von A.Da die inverse Matrix auch eine symmertrische Matrie ist, wir definieren: die Kurve

$$J(a) = A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33} + 2A_{12}xy + 2A_{13}x + 2A_{23}y = 0$$

nennen wir die **Inverse Kurve** von is a. Evidently we have

Satz 5. Das Produkt von jede nichtentartete Kurve und ihre inverse Kurve ist der Einheitsimaginerekreis.

Als eine Folgerung von den obigen Satzen haben ist zu formulieren:

Satz 6. Die Menge von allen nichtentarteten Kurven zweiter Ordnung ist eine kommutative und associative Gruppe.

Satz 7. Die Operation "Multiplikation von Kurven" kommutiert mit der Rotation des Koordinaten Systems.
Der Beweis ist in der CD Darstellung zu finden .
Ohne Beweis teilen wir mit, dass der Satz 7 ist falsch wenn man an der Stelle von Rotation beliebige Translation nimmt.

Literatur

1. G.Stanilov: *Analytische Geometrie*,SOFTEH,Sofia,1993.