Stefan UFER, München

Entwicklung geometrischer Beweiskompetenz in der Sekundarstufe I

Einleitung

Die Inhaltsbereiche der elementaren Geometrie stellen traditionell den Kontext für die Behandlung des Beweisens als mathematische Arbeitsweise im Unterricht der Sekundarstufe I dar. Nicht zuletzt die Aufnahme des Kompetenzbereichs „mathematisches Argumentieren“ in die Bildungsstandards für den mittleren Bildungsabschluss (KMK, 2004) unterstreicht die unveränderte Rolle dieses Bereichs für die mathematische Kompetenzentwicklung. Von besonderem Interesse, auch als Grundlage für eine breitere Betrachtung argumentativer Arbeitsweisen in der Mathematik, ist hier neben der Struktur der beschriebenen Kompetenz auch die Möglichkeit zur Beschreibung ihrer Entwicklung. Dieser Beitrag berichtet über eine explorative Studie, die dazu erste Ergebnisse liefert, zeigt aber auch Probleme in der Fassung des Konstrukts auf.

Geometrische Beweiskompetenz

In Anlehnung an den Kompetenzbegriff von Klieme und Leutner (2006) wird *geometrische Beweiskompetenz* verstanden als individuelle kontextspezifische Leistungsdisposition, die sich auf die Anforderungen von Beweisproblemen in der elementaren Geometrie bezieht. Explorative Arbeitsweisen, wie die Untersuchung von Vermutungen, sind hier nur insofern enthalten, wie sie für die Konstruktion eines Beweises von Bedeutung sind. Weiterhin werden – im Gegensatz zum Kompetenzbegriff bei Weinert (2001) – nicht-kognitive Aspekte ausgeblendet. Exemplarisch wird das Konstrukt an Inhalten der elementaren Geometrie der Jahrgangsstufen 7 und 8 des Gymnasiums untersucht. Die Übertragbarkeit auf andere nichtgeometrische Inhaltsbereiche kann nicht ohne weiteres angenommen werden. Algebraische Methoden sind allerdings vereinzelt auch zur Lösung geometrischer Beweisprobleme nötig (beispielsweise elementare Termumformungen).

Zur Beschreibung der Struktur geometrischer Beweiskompetenz schlagen Heinze, Reiss und Rudolph (2005) ein Modell vor, das drei Anforderungsniveaus von Aufgaben unterscheidet. Niveau I beinhaltet einfache Basisaufgaben, wie beispielsweise die Berechnung von Winkeln in einfachen geometrischen Figuren. Die Niveaus II und III beziehen sich explizit auf Beweisprobleme, wobei Aufgaben des Niveaus II lediglich einschrittige

Argumentation verlangen, Aufgaben des Niveaus III darüber hinaus die Kombination mehrerer Beweisschritte voraussetzen. Da diese simultan konstruiert werden müssen und nicht – wie bei vielen Berechnungsaufgaben – Schritt für Schritt bearbeitet werden können, ist hier ein qualitativer Unterschied im Anforderungsniveau zu Aufgaben des Niveaus II zu erwarten, der auch in mehreren Untersuchungen in den Jahrgangsstufen 7 und 8 gezeigt werden konnte.

Was ist ein Beweisschritt?

Um die Items den Anforderungsniveaus zuzuordnen, muss die Anzahl der nötigen Beweisschritte bestimmt werden. Ein Beweisschritt ist dabei ein deduktiver Argumentationsschritt, der die Anwendung eines dem Schüler bzw. der Schülerin bekannten mathematischen Satzes verlangt. Eine solche Einteilung kann auf einer stark mathematischen Betrachtung der möglichen Beweise basieren. Es ist jedoch zu erwarten, dass weitere Aspekte die Anforderungen eines Items beeinflussen können. Einerseits können die einzelnen Beweisschritte erheblich in der Komplexität der zu kombinierenden Informationen variieren (siehe auch Duval, 2002). So sind für die Anwendung eines Kongruenzsatzes mindestens drei Voraussetzungen zu prüfen, die Anwendung des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck ist vergleichsweise weniger komplex. Dies kann bedeuten, dass selbst einschrittige Beweisitems sehr viel schwieriger erscheinen als erwartet. Andererseits können bestimmte, vor allem einfache, häufig auftretende, Sätze (und deren typische Anwendungen) im Sinne eines *concept image* (Vinner & Dreyfus, 1989) bereits stark einer graphischen Repräsentation der Beweissituation verknüpft sein, dass die Anwendung des Satzes weitgehend automatisiert erfolgt und nicht mehr den Anforderungen eines eigenen kognitiver Schritts entspricht (beispielsweise im Sinne eines *chunkings*, siehe Anderson & Schunn, 2000). Dies kann dazu führen, dass eigentlich mehrschrittige Beweisprobleme in späteren Jahrgangsstufen vom Anforderungsniveau her vergleichbar werden mit einschrittigen Problemen. Ein konkretes Beispiel wird im Rahmen des Vortrags diskutiert.

Entsprechend ist zu erwarten, dass geometrische Beweiskompetenz nicht unabhängig vom Basiswissen der untersuchten Schülerinnen und Schüler konzeptuell gefasst werden kann.

Design der Studie und Forschungsfragen

In Fortführung einer Studie zu geometrischer Beweiskompetenz (Reiss et al. 2006) wurden Schüler der Jahrgangsstufen 7, 8 und 9 in Bezug auf geometrische Beweiskompetenz getestet (N_7=1113, N_8=891, N_9=341, im

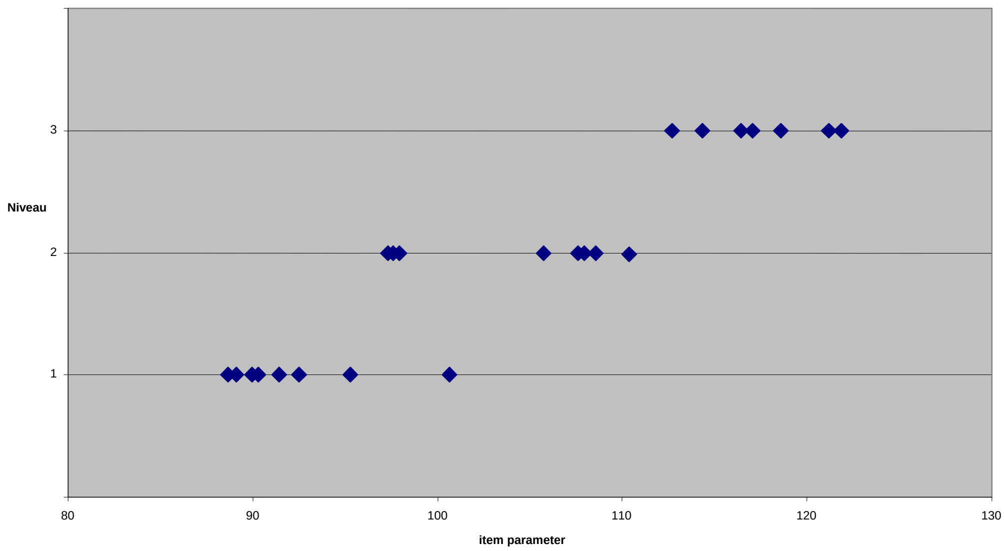
Längsschnitt: N_L=196). Die drei Tests enthielten Aufgaben zu jedem der drei Anforderungsniveaus und waren durch Ankeritems paarweise miteinander verbunden. Die Beweisprobleme waren jeweils in graphischer Form angegeben, verbunden mit einem kurzen Text.

Im Rahmen der Studie sollten unter anderem folgende Fragen in explorativer Vorgehensweise angegangen werden:

- Eignet sich das angenommene Modell zur Beschreibung geometrischer Beweiskompetenz in den Jahrgangsstufen 7 bis 9?
- Kann auf der Basis des Modells die Entwicklung geometrischer Beweiskompetenz in diesem Zeitraum beschrieben werden?
- Wie entwickelt sich geometrische Beweiskompetenz im Laufe der Sekundarstufe I?

Ergebnisse

Die Ergebnisse der drei Tests wurden für die Kernstichprobe mit einem dichotomen Raschmodell skaliert. Ordnet man die verwendeten Items aufgrund rein mathematischer Kriterien den Anforderungsniveaus zu und betrachtet man die zugehörigen Itemparameter, so zeigt sich prinzipiell der erwartete Zusammenhang, dass komplexere Items schwieriger sind, allerdings gibt es auch starke Abweichungen. Werden – unter normativen Annahmen über den Grad der Automatisierung einzelner Beweisschritte – auch die oben beschriebenen kognitiven Aspekte der Itemkomplexität mit in Betracht gezogen, so zeigt sich ein deutlicher Zusammenhang von Anforderungsniveau und Itemschwierigkeit (mit einer Abweichung, siehe Grafik).



Betrachtet man die durchschnittlichen Lösungsraten in den einzelnen Klassenstufen aufgeschlüsselt nach Leistungsdritteln, so stellt man durchgehend fest, dass lediglich Schülerinnen und Schüler des oberen Leistungsdrittels in der Lage sind, auch mehrschrittige Beweisaufgaben zu lösen. Schülerinnen und Schüler des unteren Leistungsdrittels haben bereits mit einschrittigen Aufgaben große Probleme (siehe auch Heinze, Reiss & Rudolph, 2005). Dies legt nahe, dass im Verlauf der Sekundarstufe I keine nennenswerte qualitative Entwicklung der Beweisleistung in dem Sinne erfolgt, dass beispielsweise die zusätzlichen Anforderungen wirklich mehrschrittiger Beweisprobleme besser bewältigt werden.

Ein quantitativer Zuwachs lässt sich dennoch bei Betrachtung der Personenparameter aus der Raschskalierung beobachten. Hier zeigen sich Effektstärke vergleichbar den in den großen Längsschnittstudien der vergangenen Jahre gefundenen (PISA, TIMSS). Dieser Zuwachs deutet darauf hin, dass zwar schwierigere Beweisprobleme gelöst werden können, dies aber mehr auf eine Entwicklung des geometrischen Basiswissens zurückzuführen ist als auf eine prinzipiell bessere Fähigkeit, mehrschrittige Beweise erfolgreich zu bearbeiten. Insbesondere kann vermutet werden, dass mehrschrittige Aufgaben von vielen Schülerinnen und Schülern nur dann besser gelöst werden, wenn genügend sicheres Basiswissen die Komplexität der Aufgabe faktisch reduziert.

Literatur

Anderson, J.R. & Schunn, C.D. (2000). Implications of the ACT-R Learning Theory: No Magic Bullets. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology (Vol. 5)*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Duval R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), S. 233–263.

Heinze, A., Reiss, K., & Rudoph, F. (2005). Mathematics achievement and interest in mathematics from a differential perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 37(3), S. 212–220.

Klieme, E. & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. Antrag an die Deutsche Forschungsgemeinschaft auf Einrichtung eines Schwerpunktprogramms.

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. München: Luchterhand.

Moore, R.C. (1994). Making the Transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics,* 27(3), S. 249–266.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG Schwerpunktprogramms (S. 194-208). Münster: Waxmann.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989): Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20(4), S. 356-366.