Ingo WITZKE

Eine Analyse des Leibnizschen Calculus mit moderner Mathematik

Nähert man sich der für Mathematikdidaktiker entscheidenden Frage „wie entwickelt sich mathematisches Wissen?“, so ist dies auf verschiedenen Ebenen möglich. Unsere Arbeitsgruppe des Seminars für Mathematik und ihre Didaktik der Universität zu Köln untersucht, auf der Suche nach belastbaren Antworten zu dieser Frage, systematisch den Umgang von historischen Experten mit Mathematik.[1]

Ein Schwerpunkt bei dieser Analyse bildet der Problemkreis der theoretischen Begriffe, also solcher Begriffe zu denen es keine Referenzobjekte gibt und die erst innerhalb einer empirischen Theorie eine Bedeutung erlangen.

Als geeignetes Untersuchungsobjekt haben wir u.a. den *Calculus Differentialis*, wie ihn Gottfried Wilhelm Leibniz im ausgehenden 17 Jhdt. entwickelt hat, ausgemacht. Hier finden wir einen außerordentlich wichtigen Schritt in der Mathematik auf dem Weg zur modernen Analysis vor. So war der von Leibniz zusammengetragenen *Calculus* auf dem Kontinent Grundlage für sämtliche Entwicklungen im Bereich der Differential- und Integralrechnung im 18. Jhdt.. Exponierte Vertreter, Anwender und Entwickler des *Calculus* waren Johann und Jakob Bernoulli, sowie Mitte des 18. Jhdt. Leonhard Euler, der Leibniz attestiert „he put it [the calculus] into the form of a discipline, collected its rules into a system, and gave a crystal-clear explanation.”[2]

Und noch heute werden Vorgehensweisen des *Calculus* wegen ihrer einfachen, anschaulichen und eleganten Art auf eine Vielzahl von mathematischen Problemen in den Ingenieurwissenschaften und der Physik angewendet --- in der modernen Mathematik ist dagegen außer der Symbolik nicht viel übrig geblieben. Schuld daran sind nach dem Stand der modernen Forschung die Differentiale, die eine zweifelhafte Rolle zu haben scheinen. Zum einen tragen sie den *Calculus* und vereinen Anwendungsbereiche, die vorher separat voneinander betrachtet wurden (Tangentensteigung, Krümmungsverhalten von Kurven, von Kurven eingeschlossene Flächen…), zum

---

[1] Die Arbeitsgruppe „Entwicklung mathematischen Wissens“ wurde von H.J. Burscheid und H. Struve am Seminar für Mathematik und ihre Didaktik der Universität zu Köln eingerichtet.

[2] Euler [1755] in der Übersetzung von J. Blanton, S. X.

anderen scheinen sie so vage, dass Henk Bos feststellt, „[…] it is striking, how on such insecure foundations the calculus could develop in so profilic a manner as it did from Leibniz's to Cauchy's time […]".[3]

Da nun sowohl Leibniz Interpretationen von Differentialen schwanken, von realen bis zu fiktiven Größen, als auch in modernen Untersuchungen eine Vielzahl von „Übersetzungen" keine eindeutige semantische Interpretation des Begriffes Differential ermöglichen, haben wir uns für den Weg der Rekonstruktion des *Calculus* in einem der modernen analytischen Geometrie entnommenen Modell entschieden. Ziel ist es, das Konzept der Differentiale in der Anwendung zu verstehen, also ihre Bedeutung innerhalb der theoretischen Struktur des Leibnizschen *Calculus* zu ergründen.

Ausgangspunkt für diese Analyse des *Calculus* in „praxi" sind dabei die „*Lectiones de calculo differentialium* (1691/92) von Johann Bernoulli, der ersten systematischen Lehrbuchdarstellung des leibnizschen *Calculus*.

Den Ursprung aller Ausführungen innerhalb des *Calculus* bilden, im Gegensatz zur modernen Mathematik Kurven, die Relationen zwischen geometrischen Größen, die den Punkten zugeordnet sind, definieren.[4]

Nun werden Differentiale bei Bernoulli wie folgt gebildet.

Man erhält das Differential eines aus Größen $x,y,\dots$ bestehenden Polynoms indem man die Differenz von $P(x+dx, y+dy,\dots)$ und $P(x,y,\dots)$ bildet und in diesem neuen Polynom Produkte von Differentialen streicht, so z. B. für $z = y^2 - x$

$$\Rightarrow d(z) \to (y+dy)^2 - (x+dx) - [y^2 - x] = y^2 + 2ydy + dy^2 - x - dx - y^2 + x$$

$$= 2ydy + dy^2 - dx \Rightarrow d(z) = 2ydy - dx$$

Laut Bernoulli kann dann folgende Regel angewendet werden, $d(x^p + y^q) = px^{p-1}dx + qy^{q-1}dy$,

Sein Vorgehen fassen wir wie folgt zusammen:

Es gibt eine Abbildung d, die jeder Größenfunktion γ eine Größenfunktion dγ zuordnet (das Differential der Funktion γ). Man erhält dγ mit Hilfe der Summen-, Produkt-, und Konstantregel (sowie daraus ableitbarer Regeln, wie der Quotientenregel).

Analog haben wir Bernoullis Vorgehen zur Bestimmung von Tangenten, Extremstellen und Wendepunkten in Anwendungsregeln formuliert.

---

[3] Bos, H.[1974], S. 12

[4] Die Abbildungen, die den Punkten einer Kurve C z.B. die Längen ihrer Abszissen und ihrer Ordinaten zuordnen, bezeichnen wir als Größenfunktionen.

Nachdem also sämtliche Vorgehensweisen von Bernoulli dokumentiert und zusammengefasst sind, erfolgt die Modulation in einem analytischen Modell, welches der modernen Mathematik entnommen ist.

Der Calculus (empirische Theorie)	*Analytisches Modell*
Zeichenblattebene	$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
Kurve C, gezeichnet $\varphi : C \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} : c \mapsto (x, y)$	Kurve C, in Parameterdarstellung $\phi : I \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} : t \mapsto (x(t), y(t))$
Punkt c, auf der Kurve C	Punkt (x(t),y(t)) auf einer Kurve in Parameterform
Größenfunktion $\gamma : C \to \mathbb{R}$	Koordinatenfunktion $\gamma(t) : I \to \mathbb{R}$
Differential $d\gamma$ entspricht einer Abbildung der Größe γ mit $d\gamma : C \to \mathbb{R}$	Ableitung von $\gamma(t)$ nach t $D_t\gamma(t) : I \to \mathbb{R}$
Progression der Variable x,y,… $dx = kons., dy = kons., ...$	Wahl einer bestimmten Parameterdarstellung der Kurve, so dass $D_t x(t) = kons., D_t y(t) = kons., ...$

Durch die Identifikation von $d\gamma$ mit $D_t\gamma(t)$ ist eine systematische Schritt-für-Schritt-Analyse des *Calculus* möglich.

Die vorher zusammengefassten Vorgehensweisen werden zu beweisbaren Sätzen in der modernen Mathematik und lassen den *Calculus* im Modell als logisch konsistente Theorie, ohne Unklarheiten erscheinen.

Wir haben also in dem analytischen Modell einen Maßstab mit dem wir vor allem Weiterentwicklungen des *Calculus*, wie sie z.B. Euler vornimmt, einordnen können; so lässt sich entscheiden ob der *Calculus* von mathematischen Experten konsistent erweitert wird.

Zusätzlich kann die Bedeutung der Differentiale für die Theorie(-entwicklung) mit bisher unerreichter Präzision analysiert werden. Differentiale stellen sich als theoretische Begriffe in einer konsistenten empirischen Theorie dar, deren Variabilität Leibniz meisterhaft und intuitiv richtig zu nutzen wusste um Lösungswege möglichst einfach zu gestalten.

Euler schränkt den Anwendungsbereich des *Calculus* im Bereich der Differentiale (höherer Ordnung) aus Präzisionsabsichten maßgeblich ein, da er die für uns im analytischen Modell erkennbaren (und von Leibniz genutzten) Möglichkeiten im Bereich der Progression nicht deuten konnte. Dagegen erweitert Euler den *Calculus* u. a. indem er bekannte Vorgehensweisen systematisch auf eine Vielzahl von Funktionen, sowie unendliche Potenzreihen überträgt.

Literatur

Balzer, W., Moulines, C.U., Sneed, J.D., An Architectonic for Science, The Strucuturalist Program, Dodrecht 1982.

Bernoulli, J.: Die Differentialrechnung (1691/92), ed. Schafheitlin, P., Leipzig 1924.

Bernoulli, J.: Die erste Integralrechnung (1691/92), ed. Kowalewski, G., Leipzig und Berlin 1914.

Bos, H., Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus, *Archive for History of Exact Sciences* 14 (1974), S. 1-90.

Burscheid, H.J. & H. Struve, Die Differentialrechnung nach Leibniz – eine Rekonstruktion, *Studia Leibnitiana,* Band XXXIII/2 (2001), S. 163-193.

Burscheid, H.J. & H. Struve, Die Integralrechnung von Leibniz – eine Rekonstruktion. *Studia Leibnitiana,* Band XXXIV/2 (2002), S. 127-160.

Euler, Foundations of Differential Calculus (1755), chapter 1-9, ed. Blanton, J.D., New York, 2000.

Leibniz, G.W., Mathematische Schriften, Hg. Gerhardt C.J., 7. Bände, Berlin und Halle (1849-1863), Nachdruck Hildesheim, 1971.