

Bert XYLANDER, Meißen

## **Verständnisintensives Lernen im Mathematikunterricht**

*Mathematik verstehen* ist ein hoher Anspruch an den Mathematikunterricht. Dabei werfen sich gleich mehrere Fragen auf: Was heißt *Verstehen*? Ist Verstehen dasselbe wie *Vorstellen*? Wie lässt sich *Verstehen* in einem Lernprozess initiieren? Die Fragen sind natürlich nicht neu und doch werden immer wieder neue Sichtweisen auf den Verstehensprozess, auf das Bewusstmachen von Wissen erschlossen. Eine dieser Sichtweisen wird mit dem Konzept des verständnisintensiven Lernens von PETER FAUSER begründet. Am Beispiel der unterrichtspraktischen Realisierung bei der Behandlung des Logarithmusbegriffes und der Logarithmusfunktionen wird nachfolgend dieses Konzept dargestellt.

### **Das Konzept des verständnisintensiven Lernens**

Ein zentraler Punkt im Lernkonzept von FAUSER ist das Bilden von *Vorstellungen* (Imagination). Vorstellungen werden als eine besondere Form des Denkens charakterisiert, welches über das begriffliche und abstrakte Denken hinausgeht und auch solche Denkformen wie etwa Träume oder Fantasie umschließt. Vorstellungen sind hierbei aber nicht nur als innere Repräsentationen von Erfahrungen und Wahrnehmungen anzusehen. Gerade das Vermögen, sich mit Hilfe von Vorstellungen über die erfahrene und wahrgenommene Erlebniswelt hinaus zu entfalten, auf der Basis von Vorstellungen neue Erkenntnisse und neues Wissen zu entwickeln, kennzeichnet die andere Qualität der Vorstellungen und hebt sie über die individuelle Erfahrung und subjektive Wahrnehmung heraus.

FAUSER gelangt über die Untersuchung der Imagination zum Begriff des *imaginativen Lernens* und charakterisiert als eine notwendige Voraussetzung das *praktische Lernen* durch Erfahrungen. Die Verbindung dieser zwei Aspekte mit dem Aspekt des *begrifflich-logischen Denkens* (Lernen durch Begreifen) und mit dem Aspekt einer bewussten Begleitung des individuellen Lernens durch Beobachtung und Rückschau (*Metakognition*) führt schließlich zum Konzept des verständnisintensiven Lernens. [1], [2]

Aus allgemeinpädagogischer Sicht steht das verständnisintensive Lernen in der Tradition etwa von GEORG MICHEAL KERSCHENSTEINER und spiegelt eine kognitionspsychologische Lernauffassung, auch wenn die Begrifflichkeiten (Wahrnehmung, Anschauung, Vorstellung) sehr differenziert erscheinen. In der Mathematikdidaktik sind ähnliche Ansätze bereits von HEINRICH WINTER (entdeckendes Lernen) oder HARTMUT KÖHLER (lebendiger Mathematikunterricht) vertraut (siehe auch [4]).

## **Verständnisintensives Lernen des Logarithmus und seiner Funktionen**

Die Mathematik der Logarithmen und Logarithmusfunktionen stellt für viele Schülerinnen und Schüler eine große Hürde im Verstehensprozess dar. Dabei erweist sich gerade der Begriff des Logarithmus fast als ein Synonym für die Kompliziertheit und Unverständlichkeit der Mathematik und leider auch des Mathematikunterrichtes (Befragungen und Erklärungsansätze hierzu finden sich in z. B. in [4]). Mit dem Ansinnen, einer solchen Einstellung *verständnisintensiv* zu begegnen, wurde eine Unterrichtsreihe konzipiert, die in der Planung und Realisierung bewusst diesem Lernkonzept Folge leistet.

### *Exemplarisches Lernen als Unterrichtsprinzip*

Die Konzeption der inhaltlichen Organisation des Unterrichts wurde an dem Prinzip des exemplarischen Lernens von MARTIN WAGENSCHHEIN [3] ausgerichtet. FAUSER beschreibt ein lernpsychologisch orientiertes Lernen, das die verschiedenen Denkformen (Wahrnehmung, Imagination, begriffliches Denken) einbezieht. Diese Herangehensweise verlangt aber geradezu nach einem Verlassen der konventionellen Methodik und nach dem Aufbrechen der herkömmlichen inhaltlichen Stoffstrukturen. Dies leistet das exemplarische Lernkonzept von WAGENSCHHEIN. In ihm findet sich eine probate Anleitung, konkrete Unterrichtsinhalte so zu strukturieren, dass der Blick der Schülerinnen und Schüler auf exemplarisch Wesentliches fokussiert wird und sie ihre Erfahrungen und Vorstellungen im Sinne von FAUSER ganzheitlich ausbilden und zu einem Begreifen führen können. Hinzu kommt die von WAGENSCHHEIN propagierte stete Vorwärtsschau und Rückschau vom Einstieg zu den entwickelten Kenntnissen und Fähigkeiten, analog zur Metakognition von FAUSER.

### *Erfahrungen und Vorstellungen*

Das Zusammenwirken der vier Aspekte Erfahrung, Vorstellung, Begreifen und Metakognition kann in ihrer Abfolge, in ihrer Bewusstheit oder ihrer Akzentuierung bei der Ausgestaltung eines verständnisintensiven Unterrichts stark variieren. Insbesondere ist eine Trennung der Aspekte voneinander, etwa von Erfahrung und Vorstellung, nicht immer möglich.

Der Logarithmusbegriff wurde in der Unterrichtsreihe an das Falten von Papier gebunden. Das Falten (z. B. durch jeweiliges Verdoppeln der Lagen) stellt sich dar als exponentieller Wachstumsprozess, der von den Lernenden in verschiedenen Formen wahrgenommen und erfahren werden kann. Varianten in der Faltechnik (Verdreifachen der Lagen), die Suche nach der notwendigen Anzahl von Faltvorgängen (wie viele Faltungen von Alufolie sind notwendig, um für einen Klassenraum eine tragende Säule zu falten),

die Suche nach möglichen Anzahlen von Faltungen (wie oft lässt sich ein Blatt falten, das den Boden des Klassenraumes vollständig bedeckt) sind nur einige Möglichkeiten, den Lernenden *Erfahrungen* anzutragen.

Andererseits geht mit der praktischen Erfahrung zugleich auch das Bilden der *Vorstellungen* einher. Die Frage nach der Anzahl der Faltungen eröffnet den Begriff des Logarithmus und verknüpft ihn mit einer gut vorstellbaren, individuell erfassbaren manuellen Tätigkeit. Der Logarithmus ist somit *erlebbar* für die Schülerinnen und Schüler.

In ähnlicher Weise erwächst eine Vorstellung von den Logarithmusfunktionen aus der Bewältigung einer aktiven, manuellen Tätigkeit, mithin aus der eigenen Erfahrung. Das Konstruieren von Funktionsgraphen in Koordinatensystemen, deren Längeneinheit 10 cm beträgt, unterscheidet sich deutlich von dem Zeichnen in Koordinatensystemen in gewohnter A4-Heftgröße. Die Lernenden müssen für sie ungewohnte Hilfsmittel (Tafellineal, Tafelkurvenschablone usw.) verwenden, die Koordinatensysteme liegen auf dem Boden und sie knien auf Zeichenplakaten, sie erfassen beim Zeichnen aufgrund der Größe der Zeichenfläche immer nur einen Teil des gesamten Funktionsgraphen und müssen sich den restlichen Teil merken und *vorstellen* – all das sind begleitende Tätigkeitsmerkmale, die das Zeichnen der Funktionen als etwas Besonderes charakterisieren und den Verlauf der Graphen – und mithin die damit verbundenen Eigenschaften der Funktionen – in den *Vorstellungen* (im FAUSER'schen Sinne) der Schülerinnen und Schüler verankern helfen.

### *Begreifen*

Begreifen im Sinne des verständnisintensiven Lernkonzepts ist das Ausbilden des begrifflich logischen Denkens. Dieses Ausbilden wird initiiert durch den Rückgriff auf die praktischen *Erfahrungen*, durch das Aufgreifen der vorhandenen *Vorstellungen* und eine fortgesetzte wechselseitige, gegenständliche und mathematische Interpretation der untersuchten Begriffe und Zusammenhänge. Begreifen heißt damit *Systematisieren*, *Vernetzen* mit vorhandenen Wissensstrukturen und *Einbetten* in die gesamte mathematische Begriffswelt der Lernenden.

Im Systematisierungsprozess erscheinen der Logarithmus und das Logarithmieren als eine Umkehrung des Potenzierens und werden dem Radizieren gegenübergestellt. Die Logarithmusfunktionen werden als Funktionsklasse und als Umkehrfunktionen diskutiert und begrifflich erschlossen.

### *Metakognition*

Das bewusste Begleiten (Metakognition) des Lernprozesses ist zweigestaltig. Zum einen müssen die Schülerinnen und Schüler dazu befähigt werden,

ihr eigenes Lernen selbst zu begleiten, bewusst zu reflektieren und kritisch zu verarbeiten. Hinzu tritt die Begleitung durch die Lehrperson, die den Lernprozess reflektiert, Impulse setzt, das Lernen bewusst macht und kritisch einschätzt.

Eine übergreifende Metakognition findet statt durch das schrittweise Nachvollziehen der Stufung des Lernprozesses, durch das immer wiederkehrendes Aufgreifen und Auswerten der Erkenntnisse. Eine weitere Möglichkeit für die übergreifende metakognitive Rückschau liegt in einer schriftlichen Rückbesinnung begründet, bei der die Schülerinnen und Schüler wesentliche Inhalte und Zusammenhänge der vergangenen Mathematikunterrichts aus ihrer Sicht schriftlich zusammenfassen und darlegen sollen.

### **Zusammenfassung**

In Anknüpfung an den Ausgangspunkt der Betrachtungen muss rückschauend gefragt werden: Finden die Lernenden einen verständlichen Zugang zum Logarithmus und seinen Funktionen? Werden die Lernenden die mathematischen Inhalte *verstehen*? Mit der Sichtweise des verständnisintensiven Lernkonzeptes lässt sich feststellen, dass die Schülerinnen und Schüler zweifellos ihnen eigene Vorstellungen entwickeln werden. Ein daraus resultierendes Verstehen setzt aber voraus, dass neben den Vorstellungen auch ein mathematisches Begriffs- und Regelgefüge vernetzt vorliegt, in das die Vorstellungen eingebettet werden können, und dass ein mathematisches Denkvermögen entfaltet ist. In der Entwicklung solcher Fähigkeiten zeigt sich erneut ein hoher Anspruch an den mathematischen Unterricht.

### **Literatur**

[1] FAUSER, P.: Lernen als innere Wirklichkeit. Über Imagination, Lernen und Verstehen. In: RENTSCHLER, I.; MADELUNG, E.; FAUSER, P. (Hrsg.): Bilder im Kopf. Texte zum Imaginativen Lernen. Seelze-Velber: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, 2003, S. 242–286.

[2] FAUSER, P.; IRMERT-MÜLLER, G.: Vorstellungen bilden. Zum Verhältnis von Imagination und Lernen. In: FAUSER, P.; MADELUNG, E.; (Hrsg.): Vorstellungen bilden. Beiträge zum imaginativen Lernen. Velber: Friedrich-Verlag, 1996, S. 211–243.

[3] WAGENSCHHEIN, M.: Verstehen lehren. Weinheim: Beltz Verlag 1997.

[4] XYLANDER, B.: Die Entwicklung von Vorstellungen im Mathematikunterricht. Umsetzung eines Konzeptes zum verständnisintensiven Lernen am Beispiel der Behandlung der Exponential- und Logarithmusfunktionen im Mathematikunterricht der Klassenstufe 10. Gera, Jena: Staatliches Studienseminar für Lehrerausbildung Gera, 2007.