

Simon ZELL, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd  
**Erkunden des Variablenbegriffs durch physikalische Experimente**

## **1 Hintergrund und Ziele**

Das vorzustellende Projekt ist ein Teilprojekt des europäischen Kooperationsprojekts ScienceMath mit Partnern aus Deutschland, Slowenien, Dänemark und Finnland. Grundidee ist, mathematisches Lernen in naturwissenschaftlichen Kontexten und durch aktive Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler anzuregen. Ein Schwerpunkt liegt auf der Förderung des mathematischen Begriffserwerbs, indem die Aspekte eines Begriffs wie Funktions-, Variablenbegriff usw. an konkreten Objekten oder in naturwissenschaftlichen Experimenten erfahren werden.

Zentrale Fragen zu der hier vorzustellenden Untersuchung zur Förderung des Variablenbegriffserwerbs sind:

- Welche Aspekte des Variablenbegriffs können durch Experimente erfahren werden?
- Welche Faktoren wirken sich dabei positiv bzw. negativ auf die Begriffsbildung aus?

## **2 Aspekte des Variablenbegriffs**

Malle (1986) unterscheidet drei Aspekte des Variablenbegriffs. Unter dem *Gegenstandsaspekt* versteht er eine Variable als unbekanntem oder nicht näher bekannten Gegenstand. Unter dem *Einsetzaspekt* versteht er eine Variable als Leerstelle, in die man Zahlenwerte einsetzen darf. Der dritte Aspekt ist der *Kalkülaspekt*. Die Variable stellt hier ein bedeutungsloses Zeichen dar, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf. Er unterteilt diese Aspekte zusätzlich in eine statische und dynamische Komponente. Wiegand und Jordan (2005) ordnen den genannten Aspekten verschiedene Arbeitsweisen zu. Der Kalkülaspekt ist eher technischer, der Einsetzaspekt eher rechnerischer und der Gegenstandsaspekt eher begrifflicher Natur. Die kognitive Komplexität ist beim Kalkülaspekt am niedrigsten und beim Gegenstandsaspekt am höchsten. Nach der Forderung von Malle sind alle Aspekte des Variablenbegriffs zu beachten, wobei jedoch am Anfang der Gegenstandsaspekt zu betonen sei.

Ursini et al. haben die unterschiedlichen Betrachtungs- und Arbeitsweisen von Variablen in einem 3x3-Schema zusammengefasst (Abbildung 1). Sie unterscheiden zum einen Variablen als verallgemeinerte Zahl, die eine Zahl

aus einem Wertebereich repräsentiert und zum anderen als situations-spezifische Konstante, also eine Variable, die in derselben Situation bzw. Umgebung konstant ist, deren Wert sich in einer anderen Situation ändern kann. Man kann situations-spezifische Konstanten auch als Repräsentanten einer diskreten Wertemenge sehen. Die dritte Betrachtungsweise sind Variablen im funktionalen Zusammenhang. Diese Betrachtungsweisen kann man auf drei Ebenen sehen: auf konzeptioneller, interpretativer und manipulativer Ebene.

### Aspekte des Variablenbegriffs

	<b>Konzeptionierung und Symbolisierung</b>	<b>Interpretation</b>	<b>Manipulation</b>
<b>verallgemeinerte Zahl</b>	Konzeptionierung eines allgemeinen Objekts, das in allgemeinen Methoden oder Regeln vorkommt und aus numerischen oder/und geometrischen Mustern abgeleitet wird; und seine Symbolisierung	Interpretation eines Symbols als allgemeines Objekt in algebraischen Ausdrücken oder allgemeinen Methoden	Termumformungen anwenden, um algebraische Ausdrücke umzuformen.
<b>situations-spezifische Konstante</b>	Konzeptionierung einer Unbekannten in einer bestimmten Situation und/oder in einer Gleichung und ihrer Symbolisierung	Interpretation eines Symbols als feste Zahl in Gleichungen, die dort ein oder mehrere Male vorkommen kann und deren Wert sich in einer anderen Situation ändern kann	Eine Gleichung so umzuformen, damit die Variable Gegenstand der Gleichung wird.
<b>Variable im funktionalen Zusammenhang</b>	Konzeptionierung und Symbolisierung von funktionalen Zusammenhängen, die aus einer Tabelle oder eines Graphen oder eines Textes entspringen können	Interpretation der Analogien und Gemeinsamkeiten in analytischen Ausdrücken, Tabellen und Graphen	Umformung algebraischer Ausdrücke und Anwenden der Substitution, um den Definitions- und Wertebereich, maximale und minimale Werte und das globale Verhalten der funktionalen Beziehung zu bestimmen.

Abbildung 1

(nach Ursini et al. (1996) ins Deutsche übersetzt SZ)

### 3 Physikalische Experimente zum Variablenbegriffserwerb

Physikalische Experimente bieten sich für die Förderung des Variablenbegriffs an, da die Messgrößen verallgemeinerte Zahlen (mit Einheiten) darstellen, die in einem funktionalen Zusammenhang stehen. Dadurch dass dabei der Variablenbegriff mit konkreten Gegenständen verknüpft wird, gewinnt die Variable an Sinnhaftigkeit. Es wird, wie von Malle gefordert, der Gegenstandsaspekt von Variablen betont. Weiterhin können die Schülerinnen und Schüler das Kovariationsprinzip selbstständig im Experiment erfassen. Anhand von Messtabellen sind sie aufgefordert einen

Zusammenhang zwischen den Messgrößen herauszufinden und diesen verbal und durch eine Formel auszudrücken. Nachdem eine Formel gefunden worden ist, kann diese interpretiert werden. Durch weiterführende Gedankenexperimente, die nahe am realen Experiment sind, können sich die Schülerinnen und Schüler über die Struktur einer Formel Gedanken machen.

#### **4 Das Projekt**

In dem an der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd entwickelten Teilprojekt von ScienceMath zum Variablenbegriff interessieren die konzeptionelle und die interpretative Ebene. Untersucht wird, ob Schülerinnen und Schüler sich durch physikalische Experimente die ersten zwei Spalten der Aspekte des Variablenbegriffs nach Ursini et al. erarbeiten können. Es fragt sich, ob sie Formeln aufstellen, den Inhalt der Formeln verstehen und interpretieren können.

Die entwickelte Unterrichtssequenz ist so ausgelegt, dass die Schülerinnen und Schüler ausreichend Gelegenheit haben, sich mit Variablen und den Zusammenhängen zwischen diesen Variablen auseinander zu setzen. Deshalb erfolgt vor den Versuchen bewusst keine mathematische Formulierung von Variablen und deren Eigenschaften. Erst nach der Experimentierphase werden die Begriffe Variable und Term eingeführt.

Die unterrichtliche Erprobung fand im Schuljahr 2007/08 in drei siebten württembergischen Klassen, zwei Gymnasialklassen und einer Realschulklasse, statt. Die Schülerinnen und Schüler führten insgesamt drei Versuche durch und bearbeiteten dazu ein Arbeitsblatt. Danach folgte die formale Einführung des Variablenbegriffs. Die Gymnasialklassen hatten bereits Vorerfahrungen durch die Einheit „Funktionen“; die Realschulklassen hatten keinerlei Vorerfahrungen auf diesem Gebiet.

Grundlage der Auswertung sind die Schülerarbeitsblätter, die Dialoge zwischen Lehrern und Schülern sowie untereinander, die von Projektmitarbeitern erstellten Beobachtungsbögen und ein Abschlusstest.

#### **5 Ergebnisse**

##### **5.1 Welche Aspekte werden vermittelt?**

So gut wie alle Schülerinnen und Schüler erkennen das Kovariationsprinzip und können dieses interpretieren.

Bei der Konzeption der Formel durch Variablen beschreiben Gymnasiasten die Variablen meist durch  $y$ ,  $x$  und  $f(x)$ . Die Realschülerinnen und Realschüler nutzen eher Worte oder wählen die Einheiten der

physikalischen Größen als Variablen. Viele Schülerinnen und Schüler sehen ein, dass sich eine Formel in einer anderen Umgebung ändern kann. Allerdings können nur wenige dies auf die Formel übersetzen.

## **5.2 Welche Faktoren wirken positiv/negativ auf die Begriffsbildung?**

Die Beobachtungen sprechen dafür, dass die Verknüpfung der Variablen mit konkreten Objekten sich positiv auf die Interpretation von Variablen und deren funktionalen Zusammenhang auswirkt. Durch die Experimente erfahren die Schülerinnen und Schüler anschaulich den dynamischen Aspekt einer Variablen. Schließlich kann das gemeinsame Experimentieren und Diskutieren zu einem tieferen Verständnis über den Begriff führen.

Allerdings zeigen die Erfahrungen, dass die Versuche nicht zu technisch konzipiert sein dürfen. Sie müssen so ausgerichtet sein, dass sie nicht zum Mittelpunkt der Unterrichtssequenz werden, sondern dass die mathematischen Aspekte eines Phänomens vordergründig sind.

Beim Experimentieren müssen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein Messfehler zu erkennen und diese in den Rechnungen interpretieren zu können. Sind die Abstände zwischen den Messwerten derselben Messgröße regelmäßig führt dies zu Schwierigkeiten beim Finden der Formel. In solchen Fällen formulierten die Schülerinnen und Schüler folgende Ansätze „Änderung der Messgröße  $x$  um  $l$ , bewirkt eine Änderung der Messgröße  $y$  um ...“. Der Schritt von dieser Aussage zu einem proportionalen Zusammenhang fiel vielen Realschülerinnen und Realschülern schwer. Bei unregelmäßigen Abständen hingegen, waren die Schülerinnen und Schüler viel eher geneigt den Quotienten bzw. das Produkt der Wertepaare zu betrachten und auszurechnen.

## **Literatur:**

- [1] Beckmann A. (2007): ScienceMath - ein fächerübergreifendes europäisches Projekt; in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007, Hildesheim, Berlin (Franzbecker)
- [2] Malle G. (1986): Variable; Mathematik Lehren 15, April 86, S.2-8
- [3] Barzel B., Herget. W. (2006): Zahlen, Symbole, Variablen - abstrakt und konkret; Mathematik Lehren 136, S.4-9
- [4] Wiegand B., Jordan A. (2005): Grundvorstellungen zum Variablenbegriff – eine Interventionsstudie; in: Henn/Kaiser: Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evaluation und Evolution, Franzbecker 2005, S.212-221
- [5] Trigueros M., Ursini S., Reyes A. (1996): College students' conceptions of variable; in Proceedings of the 20<sup>th</sup> PME Conference Vol.4, S.315-322