Manfred BOROVCNIK, Klagenfurt

Gesetze des Zufalls

Auf dem ersten Blick scheinen Gesetz und Zufall nicht vereinbar. Die Eigenheiten von Gesetzen des Zufalls sind entsprechend schwer zu verstehen. Einige Simulationsexperimente können hier zur Orientierung helfen. EXCEL wird benutzt, um Ideen von probabilistischen Gesetzen einzuführen. Die Ideen wurden mit Lernenden an der Sekundarstufe II und Studierenden der Betriebswirtschaft an der Universität ausprobiert. Die Rückmeldungen waren durchwegs positiv.

1. Gesetze für den Zufall?

Die Deutung von Wahrscheinlichkeit als relativer Häufigkeit in einer längeren Versuchsserie ist wesentlich nicht nur für die Anwendung sondern für das Verständnis des Begriffs. Die Gesetze der Großen Zahlen haben eine eigenartige Konvergenz der relativen Häufigkeiten gegen die zugrunde liegende (eigentlich immer unbekannte) Wahrscheinlichkeit zum Inhalt. Es gibt viele Anlässe, die indirekten Gesetze aus der statistischen Konvergenz falsch zu verstehen:

- Die Nähe zu mathematischer Konvergenz,
- die Nähe zur Physik mit ihren Gesetzen, die Vorhersagen ermöglichen,
- der Wunsch, Kontrolle über die Zukunft zu erlangen.

In den Naturwissenschaften geht es – zumindest in klassischer Auffassung – um die Klärung von Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen: Welche Versuchsbedingungen bewirken was. Werden diese in einem Experiment dann eingehalten, erlauben Gesetze die Vorhersage der Auswirkungen. Entsprechend „einfach“ ist es, ein naturwissenschaftliches „Gesetz“ als falsch zu erkennen. Störgrößen und Messfehler erschweren allerdings ein Überprüfen von Gesetzen.

Außerhalb der Naturwissenschaften ist die Kontrolle der Versuchsbedingungen viel schwieriger. Im Münzwurf etwa könnte man im Sinne der Physik ein Gerät bauen, das dann bei bestimmter Einstellung immer Kopf wirft. Statt die Störfaktoren auszuschalten versucht man hier, sie „auszugleichen“. Also: Möglichst die Lage der Münze in der Hand nicht beobachten, hoch genug werfen etc. Der „Rest“ trägt dann stochastische Züge, man spricht von der Wahrscheinlichkeit einer Münze, auf Kopf zu fallen. Welchen Gesetzen dieses „Experiment“ nun folgt, ist zu klären. Vorab sehen wir ein: Wenn man über Gesetze des Zufalls spricht, so sind das nicht Gesetze im klassisch-naturwissenschaftlichen Sinne.

Gibt es einen Zufall? Für den allwissenden Laplaceschen Dämon gibt es keinen Zufall. In der wissenschaftstheoretischen Diskussion wird das als naiver Determinismus abgetan. Es ergeben sich auch aus der Sicht von Ethik und Religion unangenehme Konflikte mit dem freien Willen, sollte dieser „Dämon“ schon alles vorher wissen. Diesen Schwierigkeiten entgeht man, indem man den Zufall einfach als eine Denkweise interpretiert, die zu nützlichen Einschätzungen und Vorhersagen führt, egal ob es einen inneren kausalen Zusammenhang gibt oder wie ein solcher aussehen könnte. Man orientiert sich dann nur an den äußeren Erscheinungen, an erkennbaren statistischen Regelmäßigkeiten oder Gesetzen.

Den Zufall mathematisch zu beschreiben, greift zu kurz. Nicht nur, weil vielen Menschen diese Beschreibung nicht zugänglich ist, sondern auch wegen der inhärenten Verzerrung. Gleicherweise „gefährlich“ ist es, den Zufall und seine Gesetze durch die praktischen Auswirkungen zu illustrieren, wie man das mittels Simulation versucht.

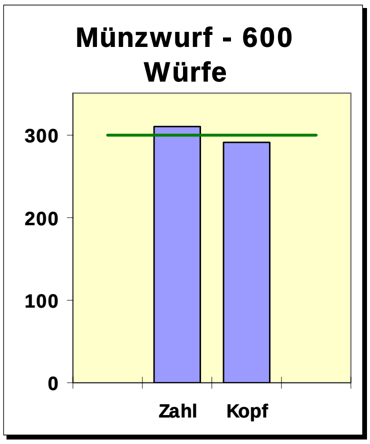
Der Zufall wird dabei in der Wirklichkeit nachgestellt. Die Ergebnisse erhalten einen szenario-artigen Charakter. Sie zeigen auf, wie sich Ergebnisse bei ‘Wirken‘ des reinen (fiktiven) Zufalls einstellen, wie sich Systeme entwickeln. Allerdings macht der Zufall alles möglich, er spielt die verrücktesten Dinge aus. Nach Murphy tritt ja alles ein, was auch nur irgendwie möglich ist (siehe dazu auch die Internet-Verweise). Hier die Spreu vom Weizen zu trennen, ist schwer. Nach endlichen vielen Schritten mag ein „Gesetz“ noch nicht sichtbar sein. Daher bemüht man sich üblicherweise, lange Serien zu erzeugen, um sich dieser „Störeffekte“ zu entledigen. Dann aber sieht man den Zufall nicht mehr am Werke, man sieht dann eigentlich das Wesentliche am Zufall gar nicht mehr.

Auf die relative Häufigkeit eines Ereignisses bezogen, heißt das, man hat zwar eine genaue Schätzung der unbekannten Wahrscheinlichkeit nach 10000 Simulationen des Einzelversuchs, aber über die Eigenheit des Zufalls lernt man daraus nichts. Was macht der Zufall? Wie stark variiert er? Welches Risiko geht man ein, wenn man aus einer kürzeren Serie (der Normalfall!) deren Ergebnisse verallgemeinern möchte.

2. Das Unterrichtsexperiment

Die folgenden Analysen stützen sich auf eine Unterrichtssequenz mit Jugendlichen im Alter von 14 Jahren. Das Zufallsexperiment sollte eigentlich Münzwerfen sein. Begonnen wurde mit einem realen Experiment, Computer-Simulationen schlossen sich an. Das Experiment wurde aus logistischen Gründen mit 5 farbigen Würfeln in einem Würfelbecher durchgeführt. Gerade Zahl wurde als Zahl, ungerade als Kopf protokolliert. Die Ergebnisse wurden gleich in den PC eingegeben und untereinander ausgetauscht.

Nr.	Wert	Code	Klasse	Anzahl	Messung Ws. Kopf
1	g	0			
2	g	0			
3	u	1	g	310	
4	g	0	u	290	0,483
5	u	1		0	
6	u	1	gesamt	600	
7	g	0			
8	u	1			Zufall
9	g	0			0,522
10	u	1			
11	g	0			
12	g	0			
13	u	1			
14	u	1			
15	g	0			
16	g	0			
17	u	1			
18	g	0			
19	g	0			
20	u	1			
598	g	0			
599	g	0			
600	u	1			



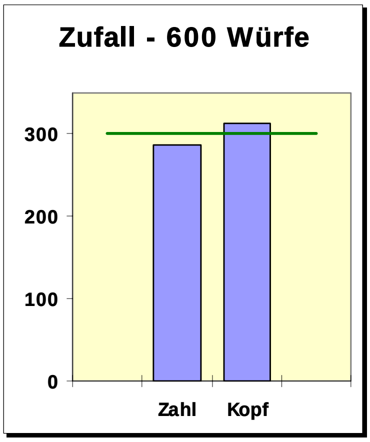


Fig. 1: Protokoll des Münzwerfens – Darunter ein späteres Simulationsergebnis zum Vergleich

Nach n = 600 Versuchen mit 290 Köpfen ergibt sich eine erste Schätzung für die unbekannte Wahrscheinlichkeit von 0,483.

Die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten nach der Zeit (entspricht der Länge der Versuchsserie) zeigt man üblicherweise in einem Schaubild (Fig. 2a): Die „letzten“ 200 Werte im Graphen variieren um weniger als 0,5%-Punkte.

Aber: ein neues Experiment würde +/- 4%-Punkte um p schwanken, wie eine Zufallssimulation belegt (siehe Fig. 2b). Der Verlauf der relativen Häufigkeiten in Abhängigkeit von der Länge der Serie, wie er üblicherweise dargestellt wird, hinterlässt den fälschlichen Eindruck, die weiteren Ergebnisse seien von den bisherigen ‚abhängig‘. Das führt im Kurzschluss u. a. zu dem berühmten ‚Gesetz‘ der kleinen Zahlen: auch in kleineren Serien „erfolgt ein Ausgleich“ der relativen Häufigkeiten in Richtung der Wahrscheinlichkeit.

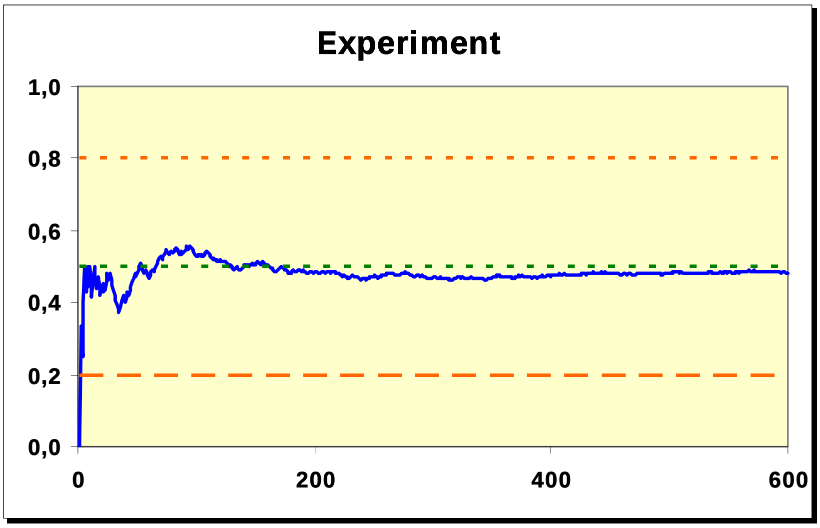


Fig. 2a: Entwicklung der relativen Häufigkeit – Experiment und eine weitere Simulation

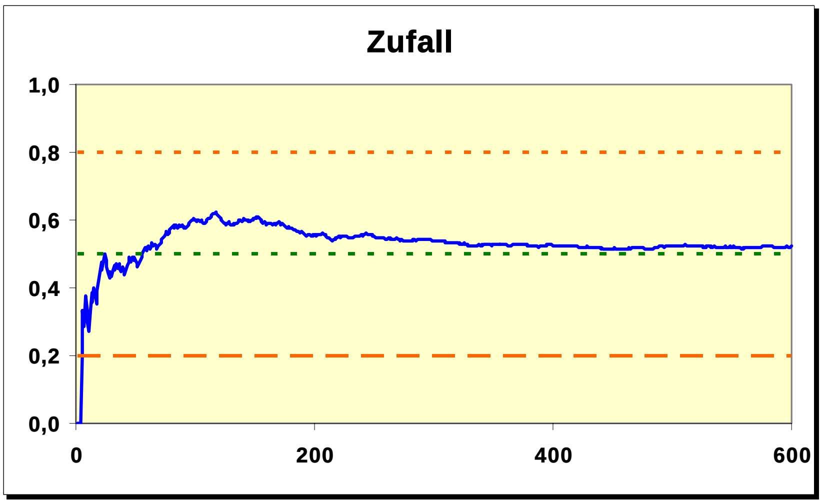


Fig. 2b: Entwicklung der relativen Häufigkeit –
Eine weitere Simulation deckt die erreichte Präzision auf

3. „Freudenthals Weg“ zum Gesetz der Großen Zahlen

Die Anlage des Experiments mit einem Würfelbecher mit 5 Würfeln legt nahe, das Schwanken der Becherergebnisse zu studieren: Wie viele Becherergebnisse ergeben den Wert 3 (oder einen der Werte von 0 bis 5). Vergleicht man die aktuellen Becherergebnisse mit der summierten Entwicklung der relativen Häufigkeiten, so erhält man freien Blick auf ein eigentümliches Verhalten des Zufalls: Der Stabilisierung auf lange Sicht steht der volle, ungebremste Zufall der aktuellen Becherergebnisse gegenüber.

Hier ist auch eine Analogie zum Messen hilfreich. Wir tun so, als ob die Wahrscheinlichkeit p eine physikalische Größe darstellt (nur hier ist p bekannt als ½, und eigentlich auch nur fiktiv). Gemessen wird der Wert p durch folgendes Verfahren: Man bestimmt die relative Häufigkeit von ‚Kopf‘ in der jeweiligen Fünfer-Serie.

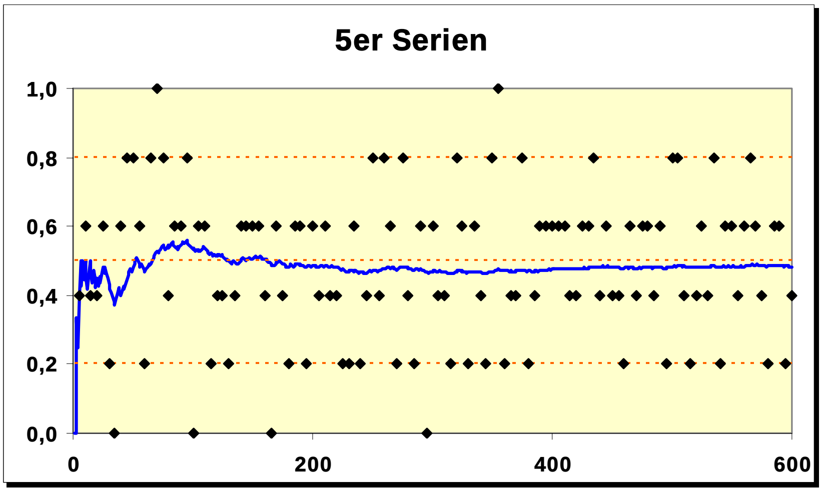


Fig. 3: Stabile Entwicklung der relativen Häufigkeiten trotz vollen Schwankens der aktuellen Fünfer-Serien

In Fig. 3 zeigt sich die Wiederholstreuung der Messwerte, welche mit wenigen Ausnahmen zwischen 0,2 und 0,8 schwanken. Insgesamt streuen die Messwerte augenfällig, um eine Achse, die etwa bei ½ liegt. Das Messverfahren scheint richtig kalibriert.

In der Messtechnik kennt man den Begriff der Präzision von Messinstrumenten. Messungen der Wahrscheinlichkeit mit Fünfer-Serien führen zu Schwankungen der Messwerte zwischen 0,2 und 0,8. Das bedeutet, die Messfehler schwanken bis +/- 0,3. Das ist viel zu ungenau! Hilft ein „anderes Messverfahren“, etwa mit 20 Daten? Aus demselben Protokoll fasst man zwei benachbarte Serien zusammen und erhält Mess-Serien der Länge 10, schließlich bei einem weiteren Zusammenfassen Serien der Länge 20.

Das neue Messverfahren ist deutlich besser, wie in Fig. 4 zu sehen ist. Nun liegen alle Werte, mit einer Ausnahme, innerhalb der Schwellenwerte 0,2 und 0,8; sie liegen zudem ganz eng um die Achse 0,5. Das Risiko, große Messfehler zu haben ist klein, die Wiederholstreuung der Messung ist sehr klein im Vergleich zum Messverfahren mit nur 5 Werten. Ein fiktives Annähern an einen obskuren Grenzwert braucht gar nicht thematisiert zu werden; Fig. 3 und 4 zeigen im Vergleich die Verbesserung der Präzision.

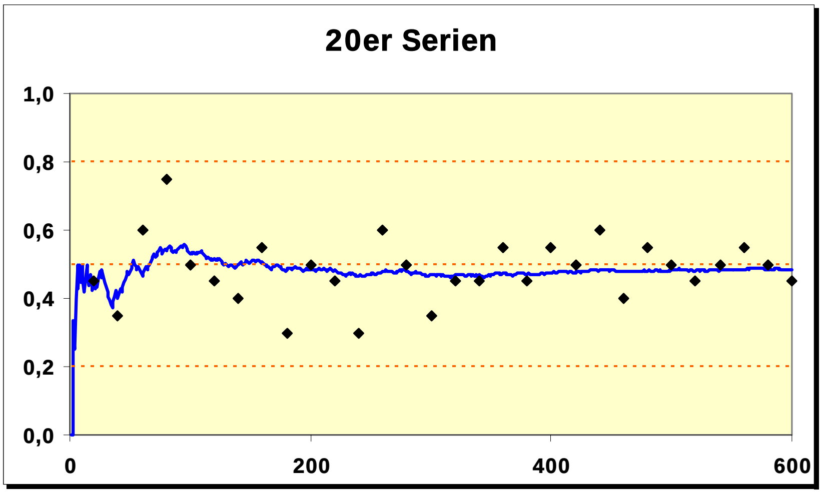


Fig. 4: Messwerte aus 20er Serien – die Achse bleibt gleich, die Mess-Werte sind viel präziser

Es bedarf gar keiner Konvergenzaussage (wenn die Länge der Serie über alle Maßen erhöht wird). Der Effekt darf ohne Vorbehalte von den bestehenden Daten übertragen werden, d.h. auch bei Erhöhung von etwa 20 auf 40 Daten in der Mess-Serie wird man mit einer Verbesserung rechnen.

Empirisch gefundene Gesetze sind von ganz anderem Charakter als mathematisch-logische oder kausale Gesetze. Daher ist es besonders wichtig, ihren Geltungsbereich auszuloten; also die Frage zu untersuchen, unter welchen Bedingungen das Gesetz gültig ist, allenfalls mit entsprechenden Abänderungen:

- Gilt das „Gesetz der Achse der Messungen“ auch bei einer Wiederholung des gesamten Experiments?
- Gilt das „Gesetz der Erhöhung der Präzision der Messungen bei Verlängerung der Mess-Serie“ auch bei Wiederholung des Experiments?
- Gelten die beiden Gesetze auch für andere Werte von p?
- Gilt das Gesetz der Erhöhung der Präzision auch, wenn man schon bei einer längeren Serie startet?
- Wie groß ist die Zunahme der Präzision? Kann man diese Zunahme mathematisch beschreiben?

4. Modellierung der Simulation – Ein Weg zur Binomialverteilung

Im Hintergrund des durchgeführten Münzwurfexperiments steht das Modell der Bernoulli-Kette: Jeder Versuch hat dieselbe ‚Erfolgswahrscheinlichkeit' (für 'Kopf') von ½ und zwar unabhängig von den Ergebnissen der bisherigen Versuche. Durch den Anteil in einer Versuchsreihe mit 5, 10 bzw. 20 Versuchen „misst" man die „unbekannte" Wahrscheinlichkeit für Kopf.

Man kann die Entwicklung der Anzahl der Köpfe mit der Zahl der Würfe durch Simulation erschließen, wie es hier erfolgte: Dabei kann man über die Beschreibung einer Konvergenz der relativen Häufigkeiten hinaus auch an der Verteilung bei n Würfen interessiert sein. Das führt auf Fragen nach der Binomialverteilung.

Diese kann man auch durch Rekursion in einem Zahlengitter erhalten. Da diese Rekursion zeilenweise immer gleich bleibt, ist eine Lösung in EXCEL recht einfach zu implementieren, siehe Borovcnik (2007). Dieser Ansatz geht direkt aus der Simulation der Binomialverteilung auf dem Galton-Brett hervor. Rekursive Ansätze leisten in der Mathematik, speziell auch in der Stochastik, einen wertvollen Beitrag zur Lösung von Problemen und zum Verständnis von Begriffen. Dadurch kann man etwa auf den Ausbau von Kombinatorik zur Behandlung der Binomialverteilung verzichten.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	p=	0,500										
2		k=										
3		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	Hilfszeile	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
5	**n = 1**	0,500	0,500	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	2	0,250	0,500	0,250	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	0,125	0,375	0,375	0,125	0	0	0	0	0	0	0
8	4	0,063	0,250	0,375	0,250	0,063	0	0	0	0	0	0
9	**n = 5**	0,031	0,156	0,313	0,313	0,156	0,031	0	0	0	0	0
10	6	0,016	0,094	0,234	0,313	0,234	0,094	0,016	0	0	0	0
11	7	0,008	0,055	0,164	0,273	0,273	0,164	0,055	0,008	0	0	0
12	8	0,004	0,031	0,109	0,219	0,273	0,219	0,109	0,031	0,004	0	0
13	9	0,002	0,018	0,070	0,164	0,246	0,246	0,164	0,070	0,018	0,002	0
14	**n = 10**	0,001	0,010	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,010	0,001
15												

Fig. 5: Pascal'sche Rekursion und schrittweiser Aufbau der Binomialverteilungen bis n=10

5. Schluss

Der Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung verzichtet auf Kombinatorik und konzentriert sich durch die Fragestellung „Wie genau ist meine Messung, die auf 5 (bzw. 10 oder 20) Würfen basiert?“ auf Fragen der *Verteilung*; insbesondere gibt die Varianz dieser Verteilung Auskunft über die erreichte Präzision der Messung der unbekannten Wahrscheinlichkeit.

Die Behandlung des Gesetzes der großen Zahlen unter Vermeidung des angesprochenen obskuren Grenzwerts der relativen Häufigkeiten ist schon in Freudenthal (1972) zu finden, wurde aber außer in Borovcnik (1992) nicht wirklich aufgegriffen. Zur Eigenheit von Wahrscheinlichkeit findet man mehr in Borovcnik und Peard (1996). Über intuitive Schwierigkeiten, die auch mit einer falschen Auffassung des Gesetzes der Großen Zahlen zusammenhängen, orientiert man sich u. a. in Borovcnik und Bentz (1991).

Für EXCEL spricht vieles: Es ist weit verbreitet. Es ist einfach. Alle Fertigkeiten kann man auf alltägliche Dinge anwenden. Die Repräsentation ist konkret fassbar, was ein Verständnis befördert. Die Möglichkeit, den Zufall live zu erleben und damit seine Spannweite auszuschöpfen, erlaubt tiefere Einsichten. Gute Hinweise zum effizienteren Einsatz findet man bei E. Neuwirth. Die graphischen Möglichkeiten sind besser als ihr Ruf, wie man auch in Borovcnik und Neuwirth (2006) sieht. Statistiker mag man mit dem Add-on REXCEL versöhnlich stimmen, welches einen nahtlosen Übergang zur statistischen Programmiersprache R ermöglicht. Lernende im Unterrichtsexperiment haben die Möglichkeiten gut ausgeschöpft und waren nicht zuletzt durch die hohe erreichte Anschaulichkeit motiviert.

Literatur

Borovcnik, M.: *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik*. Mannheim: BI 1992.

Borovcnik, M.: Das Sammelbildproblem – Rosinen und Semmeln und Verwandtes: Eine rekursive Lösung mit Irrfahrten. *Stochastik in der Schule* 27 (2007) 2, 19-24.

Borovcnik, M., Bentz, H.-J.: Empirical research in understanding probability. In: Kapadia, R., Borovcnik, M.: *Chance encounters*. Dordrecht: Kluwer 1991, 73-106.

Borovcnik, M., Neuwirth, E.: *Ein rekursiver Zugang zur Binomialverteilung*. http://www.osg.or.at/ (2006)

Borovcnik, M., Peird, R.: Probability. In: Bishop, A. e. a. (Hsg.): *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer 1996, 239-288.

Fischbein, E.: *Intuitions in science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht: D. Reidel 1987.

Freudenthal, H.: ‚The empirical law of large numbers’ or ‘The stability of frequencies’. In: *Educational Studies in Mathematics* 4(1972), 484-490.

Murphy’s Gesetz: http://de.wikipedia.org/wiki/Murphys_Gesetz

Neuwirth, E.: http://sunsite.univie.ac.at/mailman/listinfo/Improve-excel