

Christina Birkenhake, Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg und Berufliche Schule B7, Stadt Nürnberg

## Symmetrie und Kunst im Geometrieunterricht

### Zusammenfassung

Üblicherweise werden Parkettierungen in der Sekundarstufe I des Gymnasiums im Rahmen von Spiegel- und Punktsymmetrie und Dreiecksgeometrie angerissen. Hier wird ein Projekt beschrieben, bei dem die Streifen- und Flächenornamente als Anwendung der analytischen Geometrie und der Einführung des Begriffs der algebraischen Gruppen abgehandelt wurde. In Zusammenarbeit mit dem Kunstunterricht wurden die Schülerinnen darüber hinaus aufgefordert, von diesem mathematischen Hintergrund, aus ihre Phantasie spielen zu lassen und selber ein Kunstobjekt herzustellen.

## 1 Voraussetzungen

Der vorliegende Bericht beschreibt ein Projekt, das an der Fachakademie für Sozialpädagogik (FAKS) in Nürnberg/Bayern im Schuljahr 2006/07 in einer 3ten Klasse durchgeführt wurde. Das Projekt stand unter dem Titel *Symmetrie in Mathematik und Kunst* und wurde in Zusammenarbeit mit dem Kunstunterricht unternommen. Die beteiligten Schülerinnen nahmen an der 5-jährigen Ausbildung zum Erzieher/in teil: zwei Jahre Sozialpädagogisches Seminar (SPS, Klassen 1 und 2), zwei Jahre Schulausbildung an der FAKS (Klassen 3 und 4) und ein Jahr Berufspraktikum. Voraussetzung für diese Ausbildung ist der mittlere Schulabschluß. Je nach zusätzlich belegten Fächern und erreichtem Notendurchschnitt besteht die Möglichkeit, die fachgebundene Fachhochschulreife, die Fachhochschulreife oder die fachgebundene Hochschulreife zu erwerben. Zu diesen zusätzlichen Fächern gehört Mathematik mit je drei Wochenstunden im 3ten und 4ten Schuljahr.

Die mathematischen Vorkenntnisse und Fähigkeiten der SchülerInnen der FAKS sind extrem inhomogen und in der Regel nicht mit denen von Schülern der Sekundarstufe II eines Gymnasiums zu vergleichen. Der Mathematikunterricht muss sich also an ein entsprechend niedriges Niveau anpassen. In den zwei Jahren Mathematikunterricht muss zunächst, einem Schnellkurs gleich, der gymnasiale Stoff der Sekundarstufe I nachgeholt werden. Erfahrungsgemäß bereiten insbesondere die Grundrechenarten wie Bruch- und Potenzrechnung große Probleme. Auch in der Geometrie kann auf wenig Grundkenntnisse aufgebaut werden. Laut Lehrplan muss dann aber zum Beispiel Differenzial- und Integralrechnung sowie in der Geometrie Trigonometrie und Analytische Geometrie gelehrt werden.

## 2 Kriterien zur Auswahl des Lehrstoffes

Bei der folgenden Beurteilung der Auswahl und Einordnung des Themas halte ich mich an die von Holland in ([H] pp. 35, 36) vorgeschlagenen Gesichtspunkte.

(1) *Bedeutung innerhalb des Curriculums*: Das Projekt schloß zeitlich und konzeptionell an die Behandlung der Analytischen Geometrie an und stellte so eine Vertiefung des Stoffes dar. Die Beziehung zu Kunst und die praktische Umsetzung der mathematischen Erkenntnisse in Kunstobjekte lässt das Projekt zudem den im Curriculum vorgeschriebenen fachspezifischen Themen zuordnen.

(2) *Bedeutung für andere Schulfächer*: Beziehungen der Mathematik zur Kunst sollten am Beispiel von Symmetrie und Parkettierungen deutlich gemacht werden. Im Curriculum der FAKS spielt das übliche Anwendungsgebiet der Mathematik, die Physik, nur eine untergeordnete Rolle, allenfalls in dem Fach *Mathematisch-naturwissenschaftlichen Erziehung*, welches mathematisch-naturwissenschaftliche Inhalte für Kinder in kreativer und spielerischer Weise sinnlich erfahrbar machen und das natürliche Interesse am Experimentieren und Beobachten verstärken soll. Der Umgang mit den Symmetriegruppen bedient ebenfalls genau diese Anforderung.

(3) *Bedeutung für spätere Berufe*: und (4) *Bedeutung für die gegenwärtige und spätere Lebenswelt der Schülerinnen*: [H] p. 36 sagt, dass sich die "Bedeutung von Inhaltszielen des Geometrieunterrichts für spätere Berufe (ist) im wesentlichen auf Berufe ein(ge)schränkt, welche ein Studium der Mathematik voraussetzen, ...".

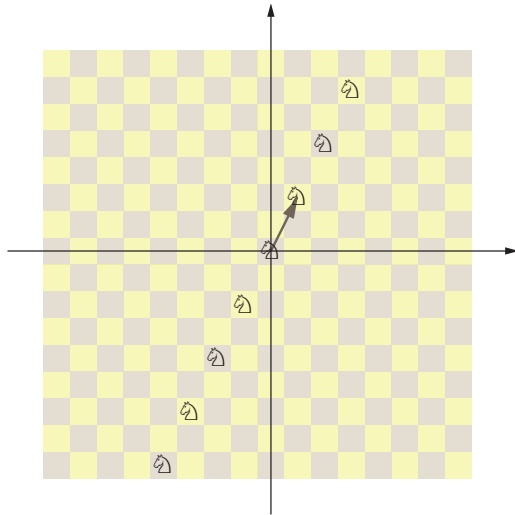
Sicherlich gehört die Sozialpädagogik nicht zu diesen Berufen. Aber gerade hier sehe ich die große Notwendigkeit eines interessanten und nachhaltigen Mathematik- und insbesondere Geometrie-Unterrichts: Wie schon bei Vollrath 1974/1981, Kirsch 1980, Graumann 1988, Schupp 1991 und Neubrand 1993 gefordert, sollte die Geometrie als Mittel zur Entfaltung spielerischer Fähigkeiten und zur Entwicklung von Freude an Mathematik dienen. Aber gerade Erzieher und Sozialpädagogen übernehmen einen Großteil der Erziehung unserer Kinder, und das wird auch in Zukunft verstärkt der Fall sein: Erzieher betreuen Kinder in Horten und bei Nachmittagsbetreuungen. Da stellt sich ihnen zum Beispiel vermehrt die Aufgabe der Hausaufgabenbetreuung. Dieser müssen sie insbesondere aber auch im Fach Mathematik ge-

wachsen sein. Wenn wir künftig mathematisch-naturwissenschaftlich interessierte Kinder und Erwachsene haben wollen, so dürfen Erzieher nicht mit Schrecken an ihren eigenen Mathematikunterricht denken, sondern müssen vielmehr Freude und Neugier auf Mathematik vermitteln. Dies ist aber nur möglich, wenn sie selber Mathematik als spannendes und unverzichtbares Kulturgut erfahren haben. Ich gehe sogar soweit zu behaupten, dass im Lehrplan der Fachakademie mehr Raum für einen qualifizierten aber auch lebensnahen Mathematikunterricht geschaffen werden sollte.

(5) *Kulturhistorische Bedeutung*: Symmetrien findet man in vielen Kunstwerken, insbesondere denen des Islam. Angehende ErzieherInnen werden in unserer multikulturellen Welt ständig mit Kindern und Jugendlichen mit Migrationshintergrund konfrontiert. So bietet das Thema Symmetriegruppen eine gute Möglichkeit, andere Kulturen besser zu verstehen, um so dieses später spielerisch im Berufsalltag umsetzen zu können. Auch im vorliegenden Fall erzeugten die Beispiele islamischer Kunst eine rege Diskussion. Muslimische Schülerinnen erläuterten die Hintergründe des Verbotes menschlicher Abbildungen in der muslimischen Kunst und versuchten so ihren Mitschülerinnen, muslimische Weltanschauungen zu erklären.

### 3 Das Projekt

Das Projekt schloß zeitlich und konzeptionell an die Behandlung der Analytischen Geometrie an. Die Schülerinnen waren also mit der Vektorrechnung formal vertraut. Zum besseren Verständnis der Vektoraddition wurde das  $xy$ -Koordinatensystem mit einem als unendlich gedachten Schachbrett verglichen und ein Vektor mit der Bewegung einer Spielfigur. Besonders anschaulich wurde das durch die Analyse des Springers beim Schach: die Schülerinnen erkannten schnell, dass der Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  einer Bewegung des Springers entspricht. Markiert man nun die mit dieser Bewegung erreichbaren Positionen, so erhält man folgendes Bild:



Nimmt man als zweite Bewegung den Vektor  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  hinzu, so bilden die Positionen des Springers ein zweidimensionales Gitter. Dieses Gitter wird allerdings nicht dichter bei der Hinzunahme beispielsweise von  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  als einer dritten Bewegung:

Abb. 1

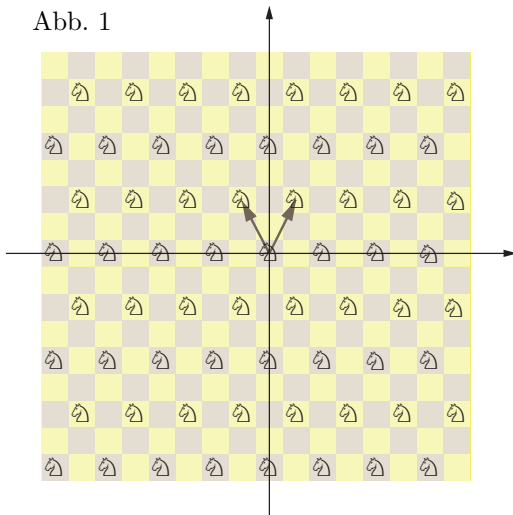


Abb. 2

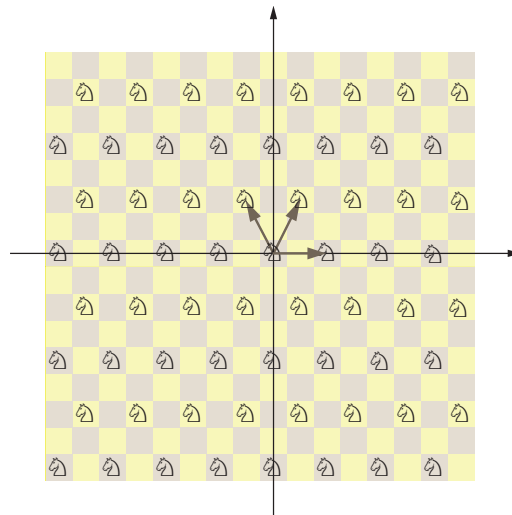


Abb. 3

Dieses erfuhren die Schülerinnen spielerisch durch Experimentieren mit verschiedenen Vektoren beziehungsweise gedachten Spielfiguren. Die entstandenen Ketten und Gitter im Koordinatensystem waren ein anschauliches Bild für die Gruppen  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . In diesem Zusammenhang ließ sich der Begriff des Erzeugendensystems leicht veranschaulichen: mehr als zwei Vektoren (in  $\mathbb{R}^2$ ) erzeugen ebenfalls nur Ketten (im Falle linearer Abhängigkeit) oder Gitter (falls zwei Vektoren linear unabhängig sind). Ebenfalls lassen sich bei diesen Beispielen leicht minimale Erzeuger, also eine Basis, finden.

Im Folgenden wurde der Gruppenbegriff auf die Bewegungsgruppen von Streifen- und Flächenornamenten ausgedehnt. Es ist sinnvoll, mit den etwas einfacheren Streifenornamenten zu beginnen. Dazu wurden den Schülerinnen mehrere Arbeitsblätter mit Streifenornamenten ausgeteilt, mit der Aufgabe, Symmetrien zu entdecken. Nachfolgend ist eines dieser Arbeitsblätter abgebildet.



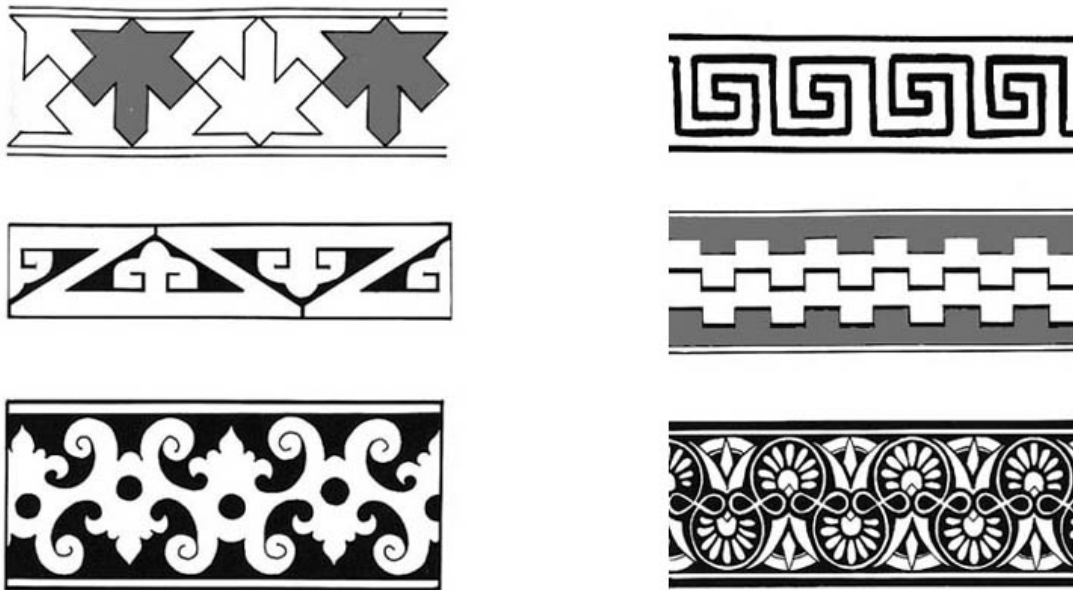


Abb. 4

So entdeckten sie, dass es je nach Muster neben der Translation durch einen Vektor, auch Drehungen um  $180^\circ$ , Spiegelungen parallel oder senkrecht zur Längsachse oder Gleitspiegelungen geben kann. Wie in der folgenden Graphik angedeutet, wurden die möglichen Symmetrien von den Schülerinnen in den Mustern der Arbeitsblätter eingezeichnet. (Hier markiert der grüne Pfeil die Translation, der blaue Strich eine Spiegelachse, der rote Pfeil markiert eine Gleitspiegelung und der Gelbe eine  $180^\circ$ -Drehung.) Ihre Ergebnisse wurden daraufhin auf Folien der Arbeitsblätter zur allgemeinen Kontrolle der eigenen Ergebnisse festgehalten.

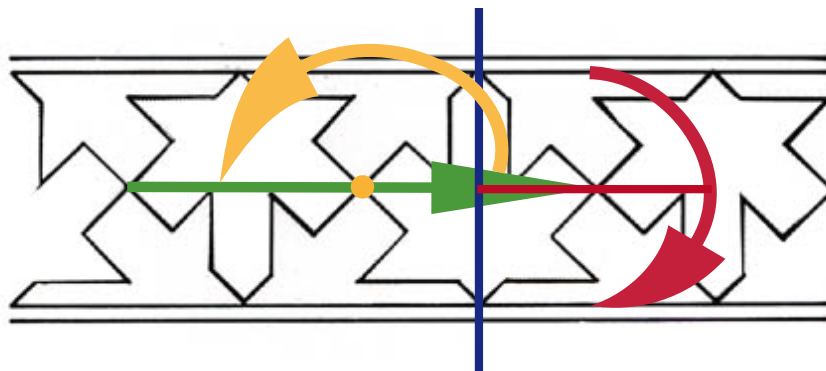


Abb. 5

Aus der Gruppentheorie ist bekannt, dass es genau 7 verschiedene Streifenmuster-Symmetrien gibt. Durch Experimentieren mit den fünf oben erwähnten Bewegungen, ist es durchaus möglich, im Unterricht zumindest den Existenzbeweis der 7 Streifenmustergruppen durchzuführen. Aus Zeitgründen wurde das aber im vorliegenden Fall nicht durchgeführt. Den Schülerinnen wurde statt dessen das abgebildete

Arbeitsblatt mit den 7 Streifengruppen ausgehändigt, um daraufhin die Gruppen den schon diskutierten Mustern zuzuordnen.

Bezeichnung	Gruppe	Beispiel
$\mathcal{G}_{p111} =$	$\langle t \rangle$	GGGGGG
$\mathcal{G}_{p1m1} =$	$\langle t, s_- \mid s_-^2 = 1, s_- t s_- = t \rangle$	DDDDDD
$\mathcal{G}_{pm11} =$	$\langle t, s_\mid \mid s_\mid^2 = 1, s_\mid t s_\mid = t^{-1} \rangle$	YYYYYYY
$\mathcal{G}_{p1g1} =$	$\langle t, g \mid g^2 = t, g^{-1} t g = t \rangle$	bpbpbpbp
$\mathcal{G}_{p112} =$	$\langle t, r \mid r^2 = 1, r t r = t^{-1} \rangle$	ZZZZZZZ
$\mathcal{G}_{pmm2} =$	$\langle t, s_-, r \mid s_-^2 = 1, r^2 = 1, s_- t s_- = t, r t r = t^{-1}, (r s_-)^2 = 1 \rangle$	XXXXXXXX
$\mathcal{G}_{pmg2} =$	$\langle t, g, r \mid g^2 = t, r^2 = 1, g^{-1} t g = t, r t r = t^{-1}, (r g)^2 = 1 \rangle$	nununu

Da diese Streifengruppenübersicht aus Schülersicht wenig übersichtlich ist, wurde ihnen der folgende Leitfaden zur Klassifizierung der Streifenmuster (nach [Sch]) ausgehändigt:

## Klassifikation der Streifenklassen

p111, p112, p1g1, p1m1, pmm2, pm11, pmg2

Der Typ  $p\ x\ y\ z$  eines Streifenornaments mit Längsachse  $G$  ist so definiert:

Gibt es eine Spiegelachse senkrecht zu  $G$ ? ja:  $x = m$

sonst:  $x = 1$

Ist  $G$  Spiegelachse?

ja:  $y = m$

Ist  $G$  Gleitspiegelachse?

ja:  $y = g$

sonst:  $y = 1$

Gibt es Drehungen mit Mittelpunkt auf  $G$ ?

ja:  $z = 2$

sonst:  $z = 1$

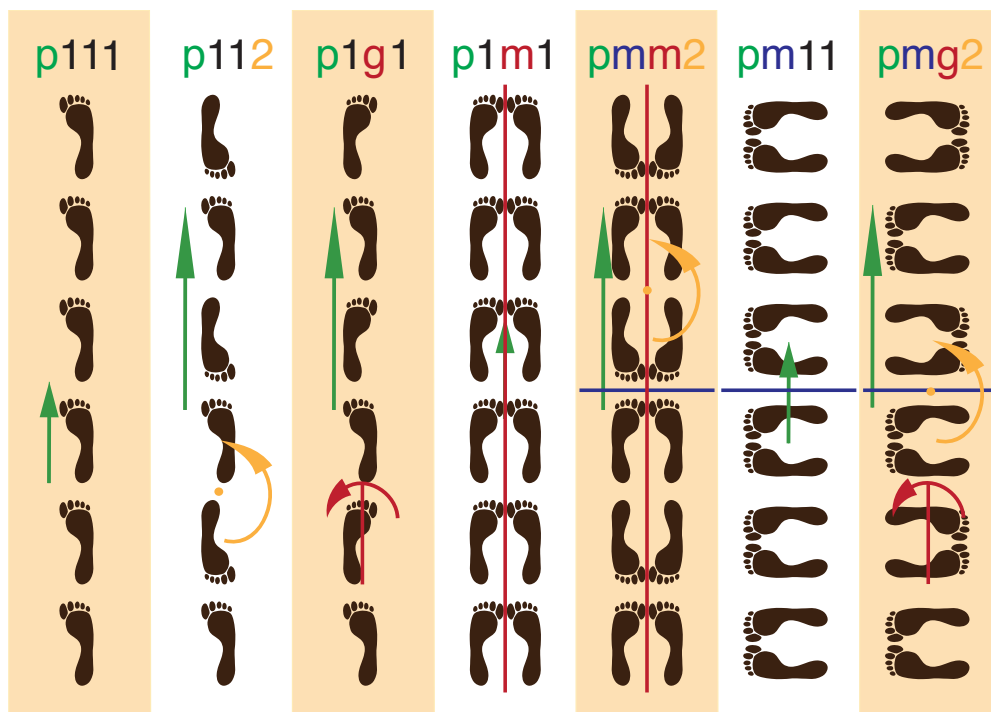


Abb. 6

Die nun folgende Diskussion der Flächenmuster ging nach ähnlichem Muster vor: Arbeitsblätter mit Beispielmustern (wie die nächste Abbildung) zeigten die möglichen Bewegungen auf:

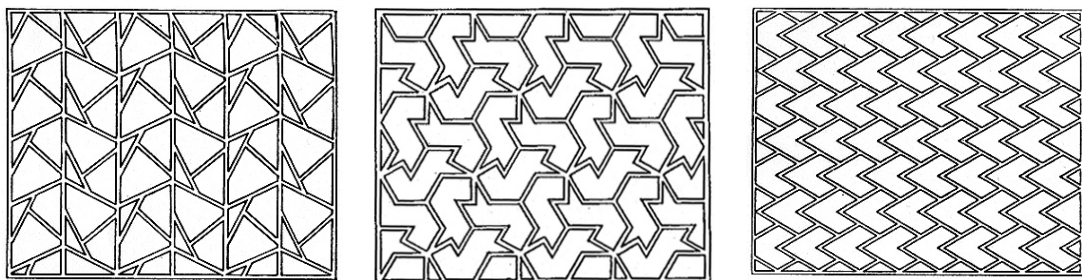


Abb. 7

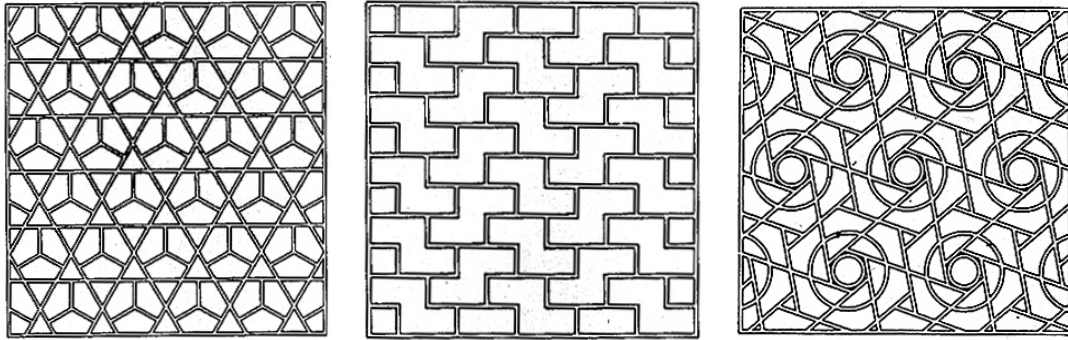


Abb. 8

Hier gibt es zwei erzeugende Translationsvektoren und je nach deren Länge und Winkel sind darüber hinaus Drehungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen möglich. Ein voller Existenzbeweis der 17 Symmetriegruppen ist meines Erachtens für den Unterricht zu umfangreich. Aber einige Überlegungen bezüglich der von den Translationen aufgespannten Gitter und der möglichen Drehwinkel sind durchaus mit Schülern machbar: So schränkt die Kristallographische Restriktion (siehe Anhang A) die möglichen Drehungen auf die fünf Fälle:  $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $90^\circ$  und  $60^\circ$  ein. Eine Übersicht über Gitter und Drehungen gibt das folgende Arbeitsblatt (siehe Anhang B für einen ausführlichen Beweis) :

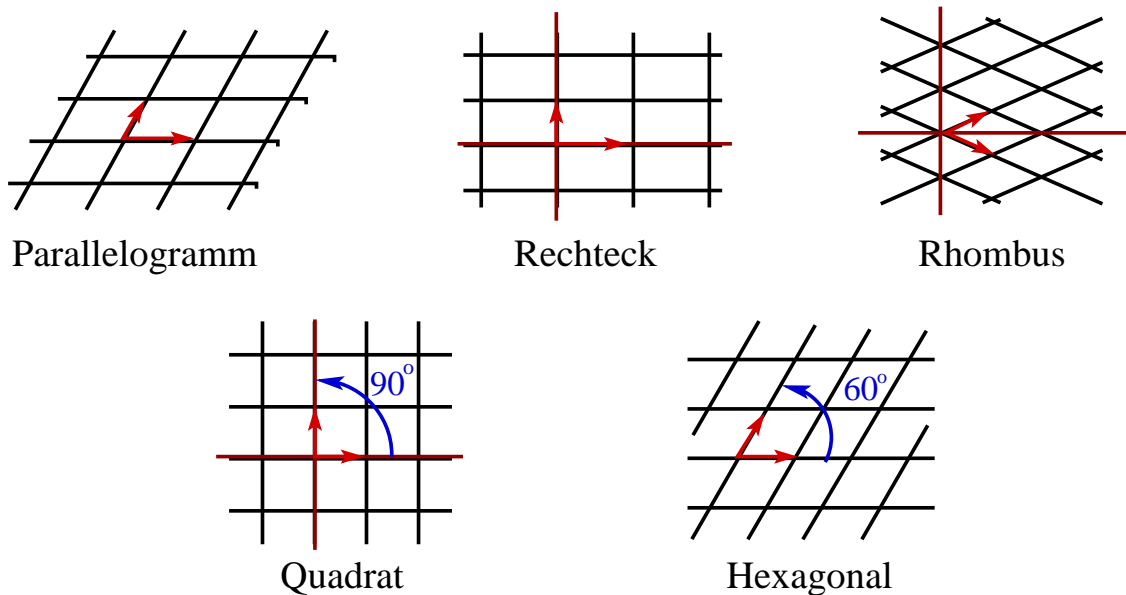


Abb. 9

Nach diesen Vorüberlegungen lassen sich die Flächenornamentgruppen bestimmen. Man geht dabei ähnlich wie bei den Bandornamentgruppen vor und berücksichtigt die Kristallographische Restriktion sowie die zugrundeliegenden Möglichkeiten der Gitter. Das in aller Einzelheit auszuführen, ist meines Erachtens für einen regulären Unter-

richt zu langwierig. Da die Gruppen hier größer als bei den Bandornamentgruppen sind, würde eine Liste der Gruppen hier ebenfalls recht unübersichtlich sein. Deswegen bietet es sich hier an, sich auf die Klassifikation der Flächenornamente (hier nach D. Schattschneider [Sch]) zu beschränken:

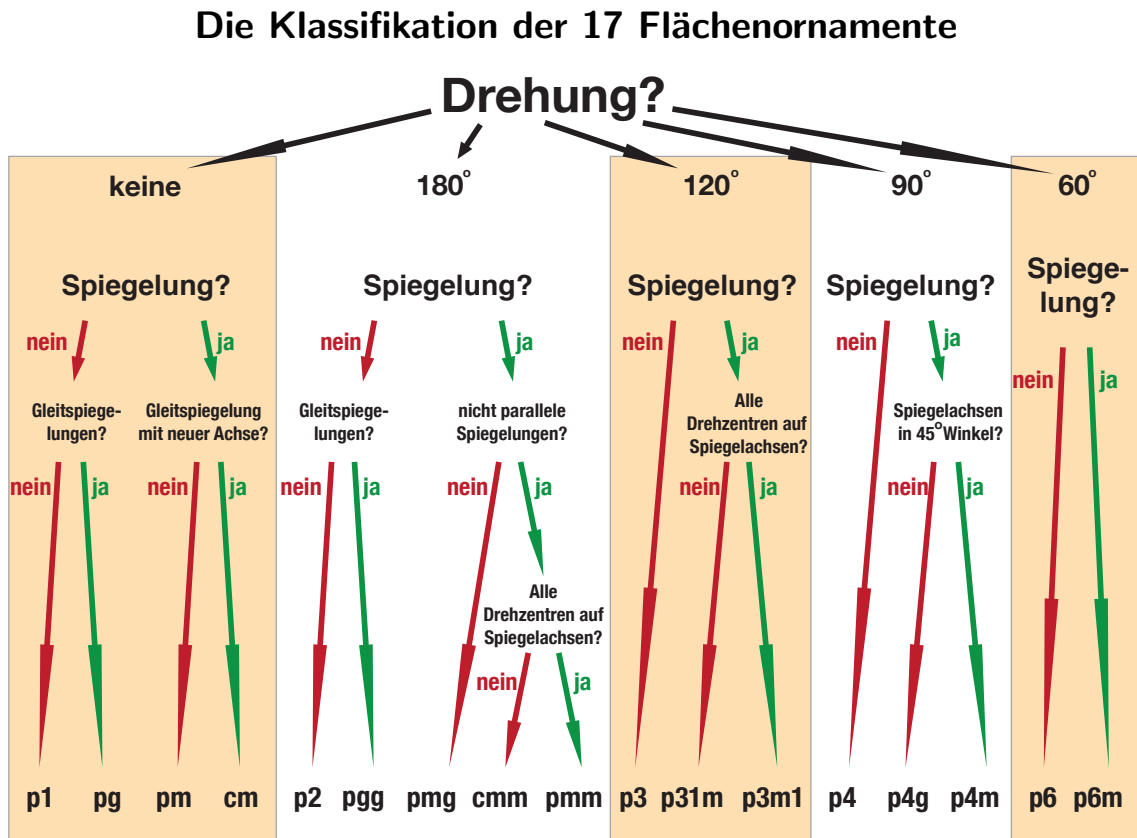


Abb. 10

Der Umgang mit der Klassifikation wurde wiederum mit zahlreichen Beispielen, zumeist Mosaik aus der Alhambra, eingeübt.

Die dem Flächenornament zugrundeliegenden Gitter bieten einen guten Startpunkt zur Erzeugung eines einfachen Flächenornaments: ein an einer Seite eines Fundamentalparallelogramms abgeschnittenes Flächenstück muss an der gegenüberliegenden Seite hinzugefügt werden.

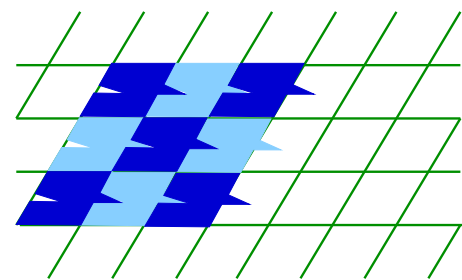


Abb. 11

Dieses und weitere Möglichkeiten zur Konstruktion eines Ornaments wurden im Unterricht diskutiert. Viele schöne Ideen zu Aufgabenstellungen und Anleitungen in diesem Kontext bietet übrigens das Buch [K-M].

Da wie oben erwähnt nicht die ganze Klasse am Mathematikunterricht teilnahm, wurden anhand einer Beamerpräsentation (siehe [Bir]) die übrigen Schülerinnen in die Klassifikation der Streifen- und Flächenornamente eingeführt. Neben den oben abgebildeten Graphiken der Klassifikationen konnten die Schülerinnen darin viele Photos von Mosaiken aus der Alhambra, der klassischen Quelle von Realisierungen der Symmetriegruppen, sehen.

#### 4 Das Ergebniss

Abschließende Aufgabe war, selbstständig Ornamente zu fertigen. Die Wahl der Techniken, Materialien etc. stand den Schülerinnen frei. Sie einigten sich schnell auf die äußere Gestalt einer Rosette, deren einzelne Elemente mit selbst entworfenen geometrischen Flächenmustern versehen werden sollten.



Abb. 12

Als übergeordnetes Farbkonzept sollten die warmen Farben gelb, orange und rot, mit einem sich von innen nach außen aufhellenden Farbverlauf, vorherrschend sein. Die Rosette hat einen Durchmesser von ca. 1,5 m. Sie zeigt einen engen Bezug zum Thema und den Bildbeispielen aus der Alhambra, jedes Element der Rosette beinhaltet ein



eigenes, jeweils recht aufwendiges Flächenmuster. Da sich keines dieser Muster unter den Bildbeispielen befand, zeigt dies aber auch, dass sich die Schülerinnen intensiv mit dem Konzept der Flächenornamente beschäftigt haben. Die Form der Blätter und einige Musterelemente wurden allerdings eindeutig von den besprochenen Mosaikbeispielen inspiriert (vgl [Bir]).

An zahlreichen Entwürfen zeigte sich, dass die Schülerinnen sich intensiv mit der Ornamentik befassten: sie recherchierten in Büchern und im Internet nach Mustern, aber benutzten ebenso auch die zuvor im Mathematikunterricht besprochenen Strategien zur Erzeugung von Mustern.

Die folgenden Detailbilder zeigen einige besonders gelungene Muster.

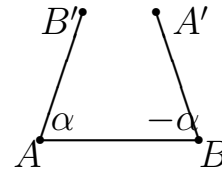


Abb. 13 bis 19

## A Kristallographische Restriktion

**Theorem** Ein Flächenornament kann nur Drehungen der Ordnungen  $n = 1, 2, 3, 4$  und  $6$  zulassen.

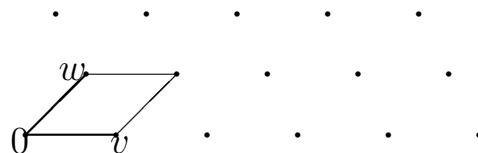
*Beweis:* Angenommen, es liegt ein Flächenornament mit einer Drehung der Ordnung  $n$  (also um  $\frac{360^\circ}{n}$ ) vor. Aufgrund der beiden linear unabhängigen Translationen gibt es mehrere Drehzentren. Betrachte zwei Drehzentren  $A$  und  $B$  derselben Ordnung  $n$  mit kleinstem Abstand. Drehe  $B$  um  $A$  mit Winkel  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ , so erhalten wir einen weiteren Punkt, den wir  $B'$  nennen. Nun drehe  $A$  um  $B$  mit Winkel  $-\alpha$  zu



einem neuen Punkt  $A'$ . Man sieht, wenn  $n = 5$  oder  $n > 6$ , dann ist der Abstand von  $A'$  und  $B'$  kleiner als der Abstand von  $A$  und  $B$ .  $\square$

## B Gitter

Die beiden erzeugenden Translationen eines Flächenornamentes entsprechen linear unabhängigen Vektoren  $v$  und  $w$ . Diese spannen ein Gitter  $G$  auf. Die Vektoren  $0, v, v + w$  und  $w$  bilden dabei ein allgemeines Parallelogramm, das Fundamentalparallelogramm des Gitters. Im allgemeinen Fall, wenn keine weiteren Symmetrien vorhanden sind, wird das Gitter vom *Parallelogrammtyp* genannt:



Parallelogramm, Typ p

Der Typ p steht hier für *primitive cell*, damit ist das Parallelogramm gemeint.

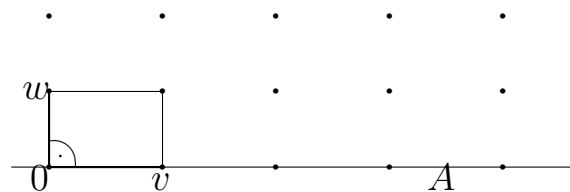
Als zusätzliche Symmetrien eines Gitters kann es Spiegelungen und Drehungen geben. Man beachte, die genaue Lage des Gitters auf der Ebene ist willkürlich, nur die Länge und der Winkel zwischen  $v$  und  $w$  ist festgelegt. Somit kann bei der weiteren Untersuchung von  $G$  immer angenommen werden, dass der Ursprung  $0$  geeignet gewählt ist. Das heißt im Falle einer Spiegelung, dass der Ursprung  $0$  auf der Spiegelachse liegt, und im Falle einer Drehung, dass  $0$  ein Drehzentrum ist.



### GITTER, DIE EINE SPIEGELUNG ZULASSEN:

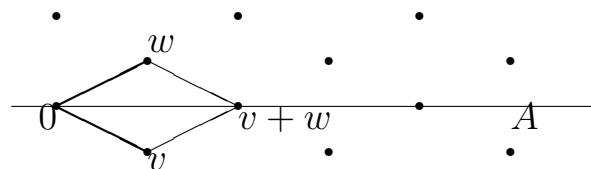
Man macht sich sofort klar, dass außer 0 weitere Gitterpunkte aus  $\{v, w, v + w, v - w\}$  auf der Spiegelachse  $A$  liegen. Aus Symmetriegründen (wir können beispielsweise die Rollen von  $v$  und  $w$  vertauschen) liefert das genau zwei Fälle:

0 UND  $v$  LIEGEN AUF  $A$ : In diesem Fall muss der Winkel zwischen  $v$  und  $w$   $90^\circ$  betragen. Solch ein Gitter wird *Rechteckgitter* genannt:



Rechteck, Typ p

0 UND  $v + w$  LIEGEN AUF  $A$ : In diesem Fall werden die Vektoren  $v$  und  $w$  unter der Spiegelung vertauscht. Damit stehen die Diagonalen des von  $v$  und  $w$  aufgespannten Parallelogramms senkrecht aufeinander. Das Gitter ist *rhombisch*:



Rhombus, Typ c

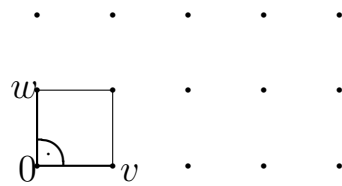
Der Typ c steht hier für *centered cell*, denn die Spiegelachse  $A$  geht durch den Mittelpunkt des Parallelogramms.

### GITTER, DIE EINE DREHUNG ZULASSEN

Wie wir in Anhang A gesehen haben, kann es grundsätzlich nur Drehungen der Ordnungen  $n = 2, 3, 4$  und  $6$  geben. Es gibt trivialerweise immer eine  $180^\circ$ -Drehung (Ordnung 2), denn das entspricht der Multiplikation mit  $-1$ . Gibt es eine  $120^\circ$ -Drehung (Ordnung 3), so, durch Kombination mit  $-id$ , auch eine Drehung der Ordnung 6. Somit bleiben hier nur die beiden Fälle  $n = 4$  und  $n = 6$  zu untersuchen:

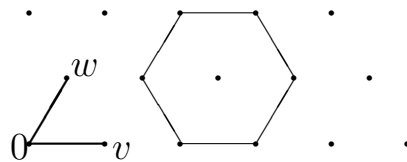
$90^\circ$ -DREHUNG: Die Drehung bildet  $v$  auf  $w$  ab, somit sind  $v$  und  $w$

gleich lang und stehen senkrecht aufeinander. Das Gitter ist *quadratisch*:



Quadrat, Typ p

60°-DREHUNG: Das Bild  $v'$  von  $v$  unter der 60°-Drehung muss eine Linearkombination von  $v$  und  $w$  sein und wir können somit annehmen, dass  $v' = w$  gilt. Das Gitter ist *hexagonal*:



Hexagon, Typ p

## Literatur

- [Bir] <http://christina.birkenhake.net>  $\Rightarrow$  Vorträge und Workshops  $\Rightarrow$  Symmetrie - in Kunst, Natur und Mathematik  $\Rightarrow$  Symmetrieprojekt an der FAKS (2007)
- [H] Gerhard Holland, Geometrie in der Sekundarstufe, Entdecken - Konstruieren - Deduzieren, Franzbecker (2007)
- [K-M] L.C. Kinsey, T.E. Moore, Symmetrie, Shape, and Space, An Introduction to Mathematics Through Geometry, Key College Publishing ( in cooperation with Springer), 2002
- [Sch] D. Schattschneider, The plane Symmetrie groups: Their Recognition and Notation, American Mathematical Monthly 85, 1978