

Diskursiver Mathematikunterricht – mathematische Probleme im adaptiven Lehrer-Schüler- bzw. Schüler-Schüler-Dialog lösen

Damit ist ein Mathematikunterricht gemeint, in dem die Lernenden unter fachlicher Anleitung der Lehrperson miteinander in der Sprache der Mathematik diskutieren und gemeinsam Probleme lösen bzw. gemeinsam Modellieren, als Kontrast zu einem Mathematikunterricht, in dem – mit einem Bild ausgedrückt – lauter einsame Robinsone auf ihren Inseln sitzen und die Mathematik bei Selbstgesprächen nur in ihren isolierten Gehirnen stattfinden lassen.

Es ist damit auch ein Mathematikunterricht gemeint, der folgende „challenges in education“ aufnimmt, von denen Professor László Lovász (Eötvös Loránd University Budapest, Hungary) in seinem Hauptvortrag „Trends in Mathematics, and how they Change Education“ gesprochen hat:

- *need of more efficient cooperation and better dissemination of new ideas;*
- *mehr gemeinsames Modellieren in Teams;*
- *nicht nur „doing mathematics“, sondern auch „explaining mathematics“, und zwar so, dass auch „outsider“ und Nicht-Mathematiker etwas mitbekommen können.*

Während Herr Lovász mit aktuellen Trends in der Mathematik als Fachdisziplin argumentiert hat, werde ich einen Begründungszusammenhang aus der aktuellen Lehr-Lern-Forschung aufbauen.

Gerne weise ich in diesem Zusammenhang auch noch hin auf den Hauptvortrag von Professor Elmar Cohors-Fresenborg (Universität Osnabrück, Deutschland) zum Thema „Mechanismen von Metakognition und Diskursivität im Mathematikunterricht“. Herr Cohors-Fresenborg erforscht u.a. die Qualität von Unterrichts-Dialogen und hat videographierte Unterrichtsszenen und ein Kategoriensystem zur Erfassung von metakognitiven und diskursiven Aktivitäten vorgelegt.

Folgende Fragen werden besprochen:

- **Was ist adaptive didaktische Kommunikation beim Lösen mathematischer Probleme? Und inwieweit vermag deren Qualität die Problemlösekompetenz der Lernenden zu fördern?**
- **Wie gelingt es, die singuläre Kreativität einsamer Robinsone zu überwinden, um zu dialogisch ko-konstruierten und deshalb intersubjektiven, überindividuellen, also regulären Lösungen zu gelangen?**
- **Welches sind Merkmale einer qualitativ hohen Adaptivität des Lehrerhandelns in Problemlösedialogen?**

In meinem Vortrag werde ich unter anderem über ein Teilergebnis aus eigener Forschung zum Thema „Problemlösedialoge“ berichten, das krass im Widerspruch stand zu meinen Erwartungen.

Wenn ich die weibliche Form „Lehrerin“, „Problemlöserin“, „Coachin“, „Helferin“ verwende, ist natürlich das andere Geschlecht immer auch mitgemeint – und umgekehrt.

Der Vortrag ist wie folgt gegliedert:

1. **Fragestellung und Überblick über den Stand der Forschung**
2. **Mein eigenes Forschungsprojekt auf diesem Hintergrund**
3. **Adaptive didaktische Kommunikation beim Lösen mathematischer Probleme**
4. **Welches Verhalten der Lehrperson führt zu einer hohen Qualität der didaktischen Kommunikation beim Problemlösen?**
5. **Zwei Beispiele von qualitativ guten Problemlösegesprächen mit hoher adaptiver Lehrkompetenz**

1. Fragestellung und Überblick über den Stand der Forschung

Ich beginne mit einer banalen Frage, die sich jede Lehrperson immer wieder stellt: Wie muss ich mich als Lehrperson in Problemlösegesprächen mit Schülern verhalten, was muss ich tun, wenn ich will, dass die Lernenden im Lösen von mathematischen Problemen besser werden? Soll ich nichts tun und die Lernenden die Lösungen selber entdecken bzw. konstruieren lassen? Oder soll ich ihnen die (Muster-) Lösungen Schritt für Schritt vorführen?

Weil diese beiden Extreme eines entdecken-lassenden Unterrichts einerseits und eines lehrerzentrierten Unterrichts andererseits erfahrungsgemäss nicht zu den erwarteten Ergebnissen führen, versuchen Lehrpersonen vernünftigerweise einen Mittelweg anzustreben. Diese Ausrichtung wird durch zahlreiche empirische Untersuchungen bestätigt, die der „guided discovery method“ deutlich bessere Noten geben als der „expository method“ einerseits und der „pure discovery method“ andererseits (Übersicht bei Mayer & Wittrock, 2006, p. 295).

Dieser Mittelweg ist nach wie vor Gegenstand der Forschung. Anstelle von Analysen der „guided dis-

covery method“ in ihrer ganzen Breite, untersucht man aber in der aktuellen Lehr-Lernforschung spezifischer die Qualität der „adaptiven Lehrkompetenz“, der „Lehr-Lern-Dialoge“, der „Unterrichtsgespräche“ und der „Problemlösedialoge“, von der vermutet wird, dass sie die Lernergebnisse beeinflusst.

Die Suche nach einem Mittelweg zwischen reiner Instruktion einerseits, bei der dem Lernenden der aktive Vollzug der Erkenntnisakte, die aktive Auseinandersetzung mit dem Problem, die Anwendung seiner „geistigen Werkzeuge“ (Aebli, 1983, S. 225) vorenthalten wird, und dem offenen, selbstständig-entdeckenden Unterricht andererseits, in dem die Bedeutung der Lehrperson, des „significant other“ unterschätzt wird, hat u.a. auch mit dem Ort zu tun, an dem wir uns im Moment befinden.

Budapest ist nämlich die Geburtsstadt des berühmten Mathematikers und Heuristikers George Pólya:



George Pólya (1887-1985)

In diesem Zusammenhang sei auch auf den Hauptvortrag von Professor Bernd Zimmermann (Friedrich-Schiller-Universität Jena, Deutschland) zum Thema „György Pólya, 1887-1985 – Zur Biographie, zum Lebenswerk und zu seiner Wirkung auf die Mathematikdidaktik“ hingewiesen:

George Pólya, der vor etwa 120 Jahren hier in Budapest geboren wurde, schrieb im Jahr 1949 er in seinem berühmten Büchlein „Schule des Denkens“:

1. **Du musst die Aufgabe verstehen.**
2. **Suche den Zusammenhang zwischen dem Gegebenen und dem Gesuchten und konstruiere einen Plan.**
3. **Führe den Plan aus.**
4. **Prüfe die erhaltene Lösung und schau über die Lösungskonstruktion zurück.**

Diese vier Aufforderungen bilden eine Heuristik (ein Findeverfahren) mit der Pólya die Lernenden beim Problemlösen indirekt zu unterstützen versuchte.

35 Jahre später, im Jahr 1984 haben Annemarie Palincsar und Ann Brown an den Universitäten Michigan und Illinois etwas Ähnliches vorgeschlagen, allerdings nicht fürs mathematische Problemlösen, sondern fürs Verstehen von Texten, das ja als anspruchsvoller kognitiver Prozess eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Problemlösen aufweist. Ihr „Reziprokes Lehren“ besteht aus folgenden vier Aufforderungen (so genannten „prompts“), die in kleinen Wissensbildungsteams unter Anleitung eines gleichaltrigen Moderators diskutiert werden:

1. **Stellt einander Fragen zum Text.**
2. **Fasst das Gelesene zusammen.**
3. **Klärt Begriffe und Textstellen, die ihr nicht versteht.**
4. **Sagt voraus, was der folgende Textabschnitt enthält.**

Reziprok, wechselseitig heisst dieses Lehren deshalb, weil jeder Lernende abwechselungsweise die Wissensbildungsgemeinschaft bzw. das Verstehensteam moderiert. Die Lernenden sind also temporär in der Rolle der Lehrperson und dann wieder in der Schülerrolle. Die offizielle Lehrperson bleibt im Hintergrund.

Vergleicht man die beiden Anätze von Pólya (1949) und von Palincsar & Brown (1984), ergibt sich Folgendes:

Gemeinsamkeiten:

- **beides sind Mittelwege zwischen Instruktion und Selberentdecken;**
- **beides sind Unterrichtsformen, in denen die Lehrperson die Denkprozesse indirekt zu len-**

- ken und unterstützen versucht;
- beide enthalten Aufforderungen (sog. „prompts“);
 - beides sind relativ allgemeine und wenig bereichsspezifische strategische Instrumente.
- Unterschiede:**
- bei Pólya gibt sich der Problemlöser die Aufforderungen selbst, er führt ein Selbstgespräch, währenddem bei Palincsar und Brown der Moderator dafür verantwortlich ist ein Gespräch stattfinden zu lassen;
 - Pólya ist – der Zeit seines Wirkens entsprechend – monologisch, individualistisch orientiert, Palincsar & Brown denken hingegen dialogisch, interaktionistisch;
 - die Heuristik von Pólya hat sich in zahlreichen empirischen Untersuchungen als wenig wirksam erwiesen, währenddem das „Reziproke Lehren“ von Palincsar und Brown z.T. sehr erfolgreich war (siehe Meta-Analyse, Review of Research von Rosenshine & Meister, 1994).

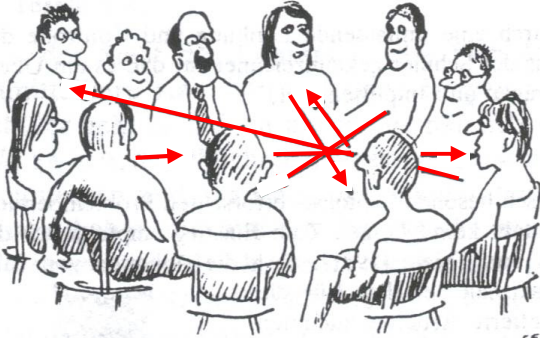
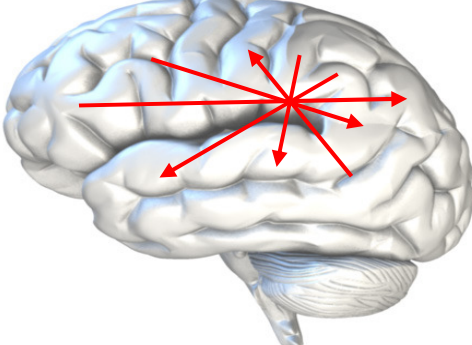
Wie kommt es, dass zwei so ähnliche Ansätze in ihrer Wirksamkeit so grosse Unterschiede aufweisen? Wie kommt es, dass Pólyas Heuristik beinahe nichts bewirkt und Palincsar und Browns „Reziprokes Lehren“ so erfolgreich ist?

Aus Gründen der Zeitknappheit, die mein undidaktisches Vorgehen hoffentlich zu entschuldigen vermag, will ich eine Antwort gleich selber geben: Die unterschiedliche Effektivität dieser beiden Verfahren kann u.a. mit Vygotsky erklärt werden, der Pólya nicht bekannt war, in Palincsar und Browns Reziprokem Lehren hingegen den theoretischen Kern bildet.



Lev Vygotsky (1896-1934)

Vygotsky vertrat die These von der Priorität des Sozialen vor dem Individuellen. Alle höheren mentalen Fähigkeiten treten für ihn zuerst auf der interpersonalen Ebene (in der Interaktion bzw. im Gespräch) und danach auf der intrapersonalen Ebene (verinnerlicht im Gehirn des einzelnen Individuums) auf. Wissens- und Kompetenzaufbau entwickeln sich nicht primär individuell, sondern interaktiv als Sinnkonstruktion innerhalb einer Kultur. Lernen ist sozial und kontextuell verankert und bedeutet Teilnahme an der Kultur und Aneignung ihrer Werte, Rituale, Interaktionsformen, Symbolsysteme (z.B. Logik, Zahlensysteme, Repräsentationsformen), Werkzeuge und Praktiken.

intermental	intra mental
	
Gespräch, Interaktion	Interaktion läuft verinnerlicht ab. Denken = eine Form des Mit-sich-selbst-Redens
Das Intermentale erzeugt das Intra mentale. Soziale Konstitution subjektiver Strukturen.	

Für Bakhtin (1986), der die Ideen von Vygotsky weiterentwickelt hat, erwirbt der Heranwachsende durch die Teilnahme an gemeinsamen Aktivitäten und Problemlösungen nicht nur ein Repertoire an Begriffen, sondern insgesamt das, was als „social language“ einer Kultur bezeichnet wird (Wertsch, 1991): Es wird auch gelernt, wie man sich als Mitglied einer bestimmten (Fach-)Kultur sieht, sich verhält und sprachlich angemessen ausdrückt, wie man kommuniziert, denkt und wertet (Hicks, 1996).



Mikhaíl Mikhajlovitsj Bakhtín (1895-1975)

All das führte dazu, dass schulischer Unterricht nicht mehr nur als Erwerb von Wissen und Können betrachtet wird, sondern auch als Sozialisation in disziplinäre Fachkulturen, als Teilnahme an fachbezogenen Problemlösungen und Diskursen. Von dieser Erweiterung des Lern- und Problemlösebegriffs hat Pólya – wie bereits erwähnt – nichts mitbekommen, und deshalb fehlt bei ihm die sozial-konstruktivistische bzw. die soziokulturelle Perspektive.

Bei uns im Westen erfolgte die Rezeption von Vygotsky und Bakhtin mangels guten Übersetzungen aus dem Russischen relativ spät, die Vygotskys in den 90-er Jahren des letzten Jahrhunderts und die Bakhtins erst in den letzten Jahren. Das mag u.a. ein Grund dafür sein, dass die offensichtlichen Zusammenhänge zwischen der Gesprächskultur im Unterricht und den Lernergebnissen der Schüler erst jetzt theoretisch geklärt und empirisch untersucht werden.

2. Mein eigenes Forschungsprojekt auf diesem Hintergrund

Als Mathematiker und Lehr-Lernforscher habe ich in den letzten Jahren auf dem Hintergrund von Pólya, Palincsar & Brown, Vygotsky und Bakhtin ein Forschungsprojekt realisiert, das ich nachfolgend kurz skizzieren möchte:

Die grossen Unterschiede zwischen der Heuristik von Pólya und dem Reziproken Lehren von Palincsar und Brown in Bezug auf die Förderung der Problemlöse- bzw. Verstehenskompetenz weckten in mir den Plan, Pólyas „Schule des Denkens“ mit Vygotskys soziokulturalistischer Perspektive zu erweitern. Denn ich vermutete, dass auch das Lösen von mathematischen Textaufgaben – ähnlich wie das Textverstehen – mit der Vorgabe von bereichsspezifischen Strategien ohne direkte (face to face) Intervention der Lehrperson gefördert werden könnte. Diese Hypothese lag ganz auf der Linie meiner reformpädagogischen Träumereien eines offenen, entdecken-lassenden Unterrichts, in dem auf möglichst eigenen (statt auf vorgezeichneten) Wegen durch selbstbestimmtes (statt durch fremdgesteuertes) Tun von- und miteinander (kooperativ) gelernt wird.

Anders ausgedrückt: Ich war mit Piaget der Meinung, dass symmetrische Problemlöseteams für die Förderung der Problemlösekompetenz besser sind als asymmetrische Problemlöseteams mit einem Leader. Das wollte ich in einem Forschungsprojekt (Dissertation) empirisch überprüfen.

Die verwendeten Strategien waren der Heuristik von Pólya entnommen. Untersucht wurden zwanzig Dreierteams in sechsten Klassen mit einem Test-Intervention-Test-Design. Es wurden Videodaten erhoben, transkribiert, (dreifach) codiert (Intercoderreliabilität > 0.93) und statistisch ausgewertet.

Die Ergebnisse dieser Inhaltsanalyse, die nachfolgend kurz zusammengefasst werden sollen, waren durchaus ermutigend.

In Problemlöseteams, die indirekt gesteuert durch die Lehrperson mit Aufforderungen (prompts) arbeiteten,

- erhöhte sich die Zielbezogenheit der thematisierten Operationen bei allen Lernenden;
- wurden mehr metakognitive Prozesse „Planung, Überwachung oder Beurteilung“ (PÜB) vor der ersten mathematischen Operation thematisiert;
- gab es mehr Paraphrasierungen von vorgeschlagenen Operationen bzw. Rechenschritten

- durch andere Gruppenmitglieder;**
- **sprachen die Wenigredner mehr und die Vielredner weniger: Die Aufforderungen wirken also ausgleichend;**
 - **produzierten die intelligenzmässig Stärksten der Gruppe weniger Gesprächsbeiträge (turns) und die intelligenzmässig Schwächsten der Gruppe mehr Turns: Die Aufforderungen wirken also auch diesbezüglich ausgleichend.**

Diese Ergebnisse waren alle signifikant (.05) bis hoch signifikant (.01). Zur Signifikanzüberprüfung wurde der Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test für die Häufigkeitsverteilung gepaarter Stichproben verwendet. Dieser ergänzt den Vorzeichentest, da er nicht nur die Richtung der Differenzen, sondern auch die Stärke der Differenzen zwischen zwei gepaarten Stichproben berücksichtigt.

Pólyas Heuristik scheint also wirksamer zu werden, wenn sie in einem dialogischen Kontext zur Anwendung kommt. Soweit so gut.

Hätte ich mich mit diesem doch recht schönen Ergebnis zufrieden gegeben und es bei der inhaltsanalytischen Interpretation der Daten belassen, dann hätte ich den Eindruck, in Problemlöseteams, die durch die Lehrperson indirekt gesteuert werden, würden die Aufforderungen allen Lernenden etwas bringen. Oder mit anderen Worten: Der dialogische Kontext würde dazu führen, dass Pólyas Heuristik bei allen Lernenden eine Erhöhung der Problemlösekompetenz bewirkt. Dem ist aber nicht so.

Unterzieht man nämlich die videographierten Problemlösegespräche einer Mikroanalyse (genauer einer Fokusanalyse und einer Analyse des Vertieftseins gemäss den Vorgaben von Anna Sfard, einer Mathematikprofessorin an den Universitäten von Haifa, Israel, Michigan, USA und London), stellt man das fest, was nach einem kurzen Exkurs über Sfard dargestellt werden soll.



Anna Sfard

In diesem Zusammenhang sei auch auf das Referat von Ladislav Kvasz zum Thema „Die Mehrstufigkeit der Verdinglichung von Symbolen“ hingewiesen, das von Herrn Kvasz wie folgt zusammengefasst wird: „Der Begriff der Verdinglichung, wie er von Anna Sfard eingeführt wurde, erklärt den Übergang von den Aktivitäten zum Objekt im mathematischen Denken. Dieser Übergang hat sich in der Geschichte von Algebra mehrmals ereignet. Im Vortrag werden die Beziehungen der verschiedenen Stufen der Verdinglichung zueinander analysiert.“

Unterzieht man also die videographierten Problemlösegespräche einer Fokusanalyse und einer Analyse des Vertieftseins nach Sfard, stellt man Folgendes fest:

Nur diejenigen Teams trugen zu diesem positiven Ergebnis bei, in denen eine Gleichaltrige bzw. ein Gleichaltriger als Tutor(in) das Problemlösegespräch adaptiv, also mit minimaler Hilfe moderierte.

Teams ohne eine(n) solche(n) „significant other“ (Mead), also symmetrische Teams wurden durch die Aufforderungen z.T. sogar schlechter.

Herausgekommen ist also die Tatsache, dass diejenigen Teams deutlich erfolgreicher waren, in denen ein kompetenterer Gleichaltriger die Rolle der Lehrperson übernommen hatte und beim gemeinsamen Problemlösen adaptive Lehrkompetenz zeigte.

Damit wir uns besser vorstellen können, womit ein kompetenterer Gleichaltriger in einem asymmetrischen Team den festgestellten Leistungszuwachs des Teams auslösen kann, seien hier ein paar Äusserungen des sich im Team adaptiv verhaltenden kompetenteren Gleichaltrigen (peer) SC 25 aufgeführt.

Die entsprechenden Stellen aus dem Transkript sind gleich anschliessend wiedergegeben.

Adaptive Gesprächsbeiträge des kompetenteren Gleichaltrigen SC 25:

- Brauchen wir das überhaupt?
- Woher wissen wir, ob es jemand anderes bezahlt?
- Bist du denn sicher, dass das alles ist?
- Seid ihr sicher, dass wir da alles haben?
- Warum denkst du jetzt, dass du das rechnen musst?
- Bist du denn sicher, dass es stimmt?
- Hilft uns das?
- Und wieso hilft uns das?
- Seid ihr sicher, dass wir die 2 Franken 10 nicht brauchen?
- Bringt dich jetzt das weiter?
- Müssen wir nicht noch etwas dazurechnen?
- Wieso jetzt 109 'plus' 76?
- Wieso denkst du jetzt so?
- Das mit den 109 'plus' 76 ist nicht richtig. Wir müssen 489 'minus' 109 rechnen.
- Was ziehen wir weg?
- Trägt diese Überlegung zur Lösung bei?
- Und - was hilft uns das?
- Und wieso denkst du jetzt, 380 'minus' 76?
- Hat uns das jetzt weitergeholfen, zum Ziel?
- Wofür gebrauchen wir das jetzt?
- Hat uns das jetzt geholfen?

Turn	Zeit		Gesprochenes / Geschriebenes
19	02:10:29	SC 25 (S)	109 Franken. Brauchen wir... brauchen wir das überhaupt, das 2 Franken 10? // Wo sie, also, weisst du, wenn sie eingeladen wird, die 2 Franken 10?
27	02:44:04	SC 25 (S)	Brauchen wir das überhaupt? // Das ist nur, vielleicht...eing
29	02:49:03	SC 25 (S)	Ja, jemand anderes, aber woher wissen wir, ob es jemand anderes bezahlt?
143	11:57:10	SC 25 (S)	Bist du denn sicher, dass das alles ist?
163	13:11:08	SC 25 (S)	Seid ihr sicher, dass wir da alles haben?
168	13:24:02	SC 25 (S)	// Ja, seid ihr sicher, dass ihr hier alles aufgeschrieben habt?
182	13:57:03	SC 25 (S)	Warum denkst du jetzt, dass du das rechnen musst?
190	14:24:00	SC 25 (S)	Bist du denn sicher, dass es stimmt?
196	14:36:22	SC 25 (S)	Hilft uns das?
198	14:44:04	SC 25 (S)	Und wieso hilft uns das?
202	15:02:16	SC 25 (S)	Seid ihr sicher, dass wir die 2 Franken 10 nicht brauchen?
218	15:54:17	SC 25 (S)	// Also, wie, wieso, bist du denn jetzt hier sicher?
220	16:00:06	SC 25 (S)	Und, bringt dich jetzt das weiter?
223	16:10:20	SC 25 (S)	Und bist du sicher, dass wir da [im Feld „Rechenweg“] alles haben, müssen wir nicht noch etwas dazurechnen?
238	16:58:21	SC 25 (S)	// Wieso jetzt 109 'plus' 76?
241	17:03:10	SC 25 (S)	Sie hat aber nicht immer 109, wir müssen ja herausfinden, wie viel ... // bist du dir da ganz sicher?
245	17:21:17	SC 25 (S)	// Ja, bist du dir ganz sicher?
248	17:24:23	SC 25 (S)	// Ich - also - wieso denkst du jetzt so?
254	17:54:14	SC 25 (S)	// Ich helfe euch jetzt noch einmal. // Das mit den 109 'plus' 76 ist nicht richtig

261	18:11:20	SC 25 (S)	// Wir müssen 489 'minus' 109
263	18:22:04	SC 25 (S)	// Was ziehen wir weg?
297	20:06:23	SC 25 (S)	// Trägt diese.. Überlegung zur Lösung bei?
299	20:10:14	SC 25 (S)	Trägt diese Überlegung zur Lösung bei?
302	20:15:27	SC 25 (S)	Und - was hilft uns das?
308	20:33:19	SC 25 (S)	Und wieso denkst du jetzt, 380 'minus' 76?
329	21:38:04	SC 25 (S)	Hat uns das jetzt weitergeholfen, zum Ziel?
345	22:27:27	SC 25 (S)	Bist du denn sicher, dass.. - wofür gebrauchen wir das jetzt? [meint das Endresultat '5']
352	22:52:15	SC 25 (S)	Hat uns das jetzt geholfen?
375	23:53:22	SC 25 (S)	Ja, seid ihr euch sicher?

Ohne die Teilnahme eines gleichaltrigen kompetenteren und adaptiv interagierenden Problemlösers in Problemlöseteams tritt also die erwartete Wirkung der Aufforderungen nicht ein. Die symmetrischen Gruppen, die über keinen solchen Leader verfügten, machten keine Fortschritte, ja. z.T. sogar Rückschritte. Die asymmetrischen Gruppen hingegen, also diejenigen mit einem kompetenten Leader, verbesserten ihr Problemlöseverhalten z.T. erheblich.

Das heisst mit anderen Worten, dass entdeckendes und kooperatives Lernen nur dann etwas bringt, wenn das Problemlöseteam durch einen kompetenteren Problemlöser moderiert und adaptiv unterstützt wird. Gibt es keinen solchen Leader, wachsen Teams nicht über ihr Niveau hinaus.

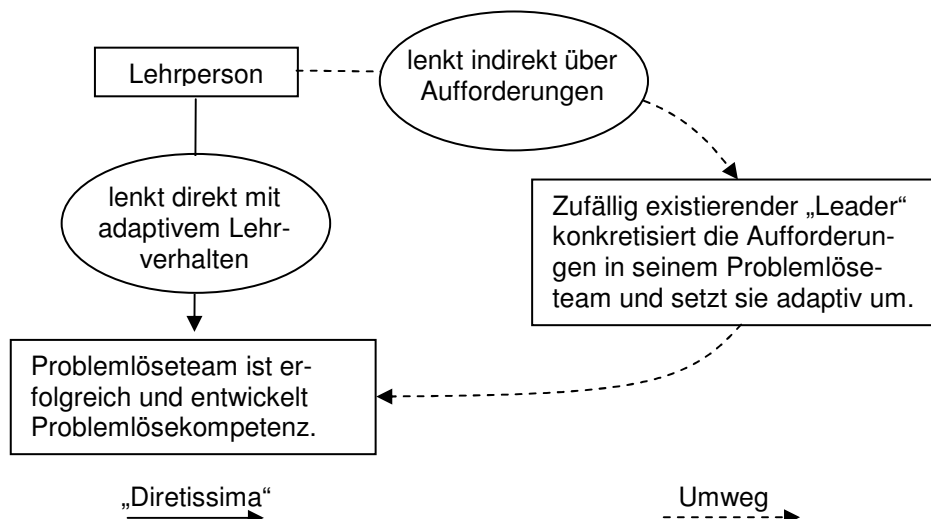
Halten wir uns den doch recht verschlungenen Weg zu diesem aufschlussreichen Ergebnis noch einmal vor Augen: Ich versuchte mit meinem Projekt nachzuweisen, dass Aufforderungen (prompts) einer indirekt wirkenden Lehrperson die Leistung von selbstständig arbeitenden Problemlöseteams verbessern, was auch gelang. Bei genauerem Hinsehen stellte ich aber fest, dass die Wirkung nur in jenen Teams enttrat, die über einen „kompetenteren Gleichaltrigen“ verfügten.

Ich wies also die Wirkung einer indirekten Lehrperson nach, die den Lernenden bloss Aufforderungen bereitstellt und sich dann zurückzieht (fading). Diese Wirkung trat aber nur dann ein, wenn auch eine Art direkte Lehrperson (face-to-face) – eben in der Form des kompetenteren Gleichaltrigen bzw. des „significant other“ – vorhanden war, die die Aufforderungen konkretisierte und adaptiv umsetzte.

Mit anderen Worten: Beim Versuch die offizielle Lehrperson in den Hintergrund zu drängen (ganz nach reformpädagogischer Manier), sind diejenigen Dreierteams, die über keine Leader verfügten, auf der Strecke geblieben, währenddem die mit einem „Leader“ erfolgreich waren.

Dieses Ergebnis führte zur Einsicht, dass es nicht besonders ökonomisch ist, den Umweg über zufällig vorhandene „Leader“ unter den Gleichaltrigen zu nehmen, wenn doch die Lehrperson in Sachen Problemlösen Expertin ist bzw. sein sollte.

Anders dargestellt: Wozu der Umweg, wenn doch der bloss zufällig vorhandene „Teamleader“ mangels einer spezifischen Ausbildung sicher weit weniger kompetent und weniger adaptiv ist als die Lehrperson?



Und da die rudimentären Formen einer adaptiven didaktischen Kommunikation bei den diesbezüglich nicht ausgebildeten Gleichaltrigen bereits derart Wirkung zeigten, ist zu erwarten, dass eine in adaptiv-

dem Lehrverhalten spezifisch ausgebildete Lehrperson noch wirksamer sein müsste. Diese Hypothese ist Gegenstand einer weiterführenden Untersuchung.

Fazit:

Empirische und ökonomische Gründe legen uns nahe, dass die Lehrperson beim Aufbau von Problemlösekompetenz an Problemlösegesprächen aktiv teilnehmen und nicht nur indirekt über die Vorgabe von Strategien intervenieren sollte.

Erst wenn bei den Lernenden die grundlegenden Problemlösekompetenzen vorhanden sind, ist es denkbar, dass Mitschülerinnen und Mitschüler als TutorInnen mit adaptiver Problemlösekompetenz versehen werden, um die Problemlöseteams wirkungsvoll moderieren zu können. Und in einem dritten Schritt muss natürlich dann das vollständig selbständige Problemlösen stattfinden.

Was es heisst, aktives Entdecken und Problemlösen professionell auszulösen, zu begleiten und am Schluss auf den Punkt zu bringen, soll im nächsten Schritt theoretisch und an zwei Beispielen aufgezeigt werden.

3. Adaptive didaktische Kommunikation beim Lösen mathematischer Probleme

Ich habe oben einen Theorierahmen skizziert, den soziokulturalistischen von Vygotsky und Bakhtin, der bei der Klärung der Zusammenhänge zwischen sozialer Interaktion und schulischem Lernen Hilfe verspricht und Gesichtspunkte zur Verfügung stellt für die Analyse, Reflexion und Weiterentwicklung der Qualität von mathematischen Problemlösegesprächen. Die Erforschung der „Lehr-Lern-Dialoge“ und der „Unterrichtsgespräche“ ist insbesondere in der Mathematik dringend notwendig, denn die Vermutung ist evident, dass es eine starke Beziehung gibt zwischen deren Qualität und den Lernergebnissen der Schüler.

Beim Lösen von mathematischen Problemen spielen Fragen eine wesentliche Rolle. Es gilt sich durch geeignete Fragen ein zunehmend klareres Verständnis der Problemstellung zu verschaffen, was schliesslich zur Einsicht in die entscheidenden Beziehungen und zur Lösung des Problems führt. Die Lernenden sind aber häufig noch nicht fähig, sich die entscheidenden Fragen selber zu stellen. Deshalb muss die Lehrperson dies am Anfang stellvertretend für sie tun. Mit ihren Fragen fordert sie die Lernenden auf, das Problem unter bestimmten Gesichtspunkten zu betrachten. Ihre Fragen sind somit didaktische Mittel zur Steuerung des Problemlösungsprozesses.

Diese Steuerung muss aber nach der grösstmöglichen aktiven Beteiligung der Lernenden an der Problemlösung, also nach dem „Prinzip der minimalen Hilfe“ geschehen, sonst wird dem Lernenden – wie bereits gesagt – der aktive Vollzug der Erkenntnisakte, die aktive Auseinandersetzung mit dem Problem, die Anwendung seiner „geistigen Werkzeuge“ (Aebli, 1983, S. 225) vorenthalten.

Die strukturierenden Fragen der Lehrperson lösen in den Lernenden Nachdenken aus und im Idealfall zwischen ihnen einen regen sprachlichen Austausch, der die Externalisierung des individuellen Nachdenkens darstellt. Die Lehrperson lässt dem selbständigen Nachdenken der Lernenden so lange seinen Lauf, bis sie stecken bleiben und nicht mehr weiterkommen.

Aber auch, wenn sie Hilfe brauchen, interveniert die Lehrperson nicht sofort auf massive Weise, sondern versucht zunächst durch allgemeine Aufforderungen zum Beobachten und Nachdenken die Aufmerksamkeit der Lernenden auf wichtige Aspekte zu lenken. Erst wenn der Problemlöseprozess über längere Zeit ins Stocken gerät oder gar still steht, ist die Lehrperson berechtigt, ihre helfenden Fragen auf spezifische Inhalte zuzuspitzen. Erst wenn „alle Stricke reissen“ muss die Lösung von der Lehrperson Schritt für Schritt laut denkend vorgezeigt werden (modeling).

Die sozial-konstruktivistische und die soziokulturalistische Unterrichtsgesprächsforschung untersucht sowohl die Fragen der Lehrperson als auch die dadurch ausgelösten Gespräche der Lernenden mit dem Ziel Qualitätsmerkmale herauszufinden, die zu besonders erfolgreichem Problemlösen führen.

Nach einer Renaissance der Reformpädagogik in den achtziger Jahren des letzten Jahrhunderts mit ihrem ideologisch vorgetragenen selbständig entdeckenden Lernen, wird in den letzten Jahren den sozial vermittelten Lehrprozessen beim Problemlösen wieder mehr Beachtung geschenkt. Dies nicht zuletzt auch dank neueren Auffassungen, gemäss denen Lernprozesse als Ko-Konstruktionen von Wissen und Können in sozialen Interaktionen konzipiert sind. Im Umfeld dieser sozialen Erweiterung des Lernbegriffs sind in den letzten 25 Jahren aufschlussreiche Erkenntnisse zum Einfluss sozialer Interaktionen auf die kognitive Entwicklung (sozial-konstruktivistischer Ansatz von Doise & Mugny, 1984; Perret-Clermont, 1980) und zur Frage, wie soziale, insbesondere sprachliche Interaktion Lernprozesse initiieren und unterstützen kann (soziokulturalistischer Ansatz von Vygotsky und Bakhtin), entstanden.

Sowohl die Schweizer Doise, Mugny und Perret-Clermont als auch die Russen Vygotsky und Bakhtin untersuchten – bei all den Unterschieden zwischen diesen zwei Ansätzen, die im Rahmen meines

Vortrags vernachlässigt werden müssen (siehe dazu Reusser, 2001, 2006) – das Individuum nicht isoliert als Einzelwesen, sondern ihr Erkenntnisinteresse war auf seine Einbettung in den sozialen, historischen und kulturellen Kontext ausgerichtet.

Überträgt man Vygotskys These von der Priorität des Sozialen vor dem Individuellen, d.h. die von ihm postulierte Entwicklung vom Intermental zum Intramental und Bakhtins Idee der „social language“ auf den Unterricht, so bedeutet das, dass schulisches Lernen nicht mehr nur auf den Erwerb von Wissen und Können ausgerichtet ist, sondern auf die Sozialisation in disziplinäre Fachkulturen, auf die Teilnahme an fachbezogenen Problemlösungen und Diskursen.

Insofern kündigt sich also ein Paradigmenwechsel an, der mit folgender Gegenüberstellung skizziert werden soll:

Lernen als Erwerb (learning-as-acquisition)	Lernen als Teilnahme bzw. Mitwirkung (learning-as-participation)
Individuelle Bereicherung, Akkumulation von Wissen.	Gemeinschaftsbildung, gemeinsames Aktivsein, taking part, being a part, becoming a part of a greater whole.
Suche nach kognitiven Invarianten, nach repetitiven, stabilen Mustern; nach dekontextualisierten mentalen Schemata, die nach universellen Regeln gebildet sind.	Interessiert an den Arten der Kommunikation, den Kommunikationsfertigkeiten, der Rolle der Sprache, den kontextuellen Faktoren, am Intermental, an der steten Veränderung und den sozialen Interaktionen.
States	Actions
Erwerb von etwas, etwas in Besitz nehmen.	Ein Teilnehmer einer Gemeinschaft werden: Lernen ist Initiation in die Kultur bzw. in den Diskurs der “mathematical community“
Die Lernenden sind Empfänger (Konsumenten), (Re-) Konstrukteure, am Schluss Besitzer des Wissens.	Die Lernenden sind Lehrlinge, werdende Teilnehmer an einem Diskurs.
monologisch	dialogisch
Kognitiver Konflikt	Diskursiver Konflikt
Die Lehrperson ist Lieferer, Erleichterer, Vermittler.	Die Lehrperson ist Teilnehmer-Experte, jemand, der die praktische und diskursive Auseinandersetzung ermöglicht und aufrechterhält. Sie verhilft mit Kognitiver Meisterlehre (cognitive apprenticeship) (Brown et al., 1989) dazu, dass die Lernenden zu aktiven Teilnehmern am mathematischen Diskurs werden und dass die Klasse zu einer “community of inquiry“ (Schoenfeld, 1996) wird.
Mathematik	Mathematisierung
Eigentum, Besitz, Produkt, Ware (individuell, öffentlich)	Ein Aspekt der Praxis, des Diskurses, der Tätigkeit.
Wissen haben, besitzen.	Dazugehören, teilnehmen, kommunizieren.
Knowledge. Permanence of <i>having</i>.	Knowing. Constant flux of <i>doing</i>.

Nach diesem Ausblick komme ich wieder zurück zu den sozialen Interaktionen, insbesondere zu den sprachlichen, die Lernprozesse initiieren und unterstützen und damit auf das Problemlösen und auf die kognitive Entwicklung eine positive Wirkung haben.

Im Speziellen will ich von den Ko-Konstruktionen reden, d.h.

- vom wechselseitigen Aufgreifen, Abstimmen und Aushandeln der unterschiedlichen Ideen und Sichtweisen der Lernenden;
- vom interaktiven Ko-Konstruieren der für das Fach relevanten Begriffe, Prozeduren, Strategien und Konventionen;
- vom Beobachten und aktiven Einüben von fachspezifischen Figuren des Denkens, Problemlösens und Kommunizierens in der Interaktion mit anderen;
- vom interaktiven Mitkonstruieren und Weiterentwickeln von Normen und Standards des

- **gemeinschaftlichen Lernens und Problemlösens (O'Connor & Michaels, 1996; Voigt, 1994); vom Entwickeln individueller epistemologischer Vorstellungen und „beliefs“ (De Corte, Op'tEynde & Verschaffel, 2002; Muis, 2004).**

Die Lehrperson ist dabei nicht mehr primär Lieferer, Erleichterer, Vermittler, sondern Teilnehmer-Experte, also jemand, der die praktische und diskursive Auseinandersetzung ermöglicht und aufrecht erhält. Sie trägt die Verantwortung für die Schaffung produktiver Problemstellungen sowie für die inhaltliche und diskursive Qualität der darauf bezogenen Unterrichtsgespräche. Das setzt voraus, dass sie nicht nur didaktisch, sondern vor allem fachlich-mathematisch gut ausgebildet ist und aus eigener Erfahrung weiss, was „doing mathematics“ konkret bedeutet.

Aber die Lehrperson muss sich auch auseinandergesetzt haben mit der Bedeutung der sozialen Interaktion beim Wissensaufbau oder, technischer ausgedrückt, mit der Frage „how speech unites the cognitive“ (Cazden, 1986, S. 436). Denn soziale Interaktionen können Lernen initiieren, anleiten und unterstützen. Best-Practice-Studien haben gezeigt, dass es bezüglich der Qualität lern- bzw. problemlösewirksamer Lehrgespräche grosse Unterschiede gibt (Qualität „erfolgreicher“ Lehrgespräche: z.B. Cobb & Yackel, 1996; Kovalainen, Kumpulainen & Vasama, 2001; Leinhardt, 2005; Voigt, 1994; Mikroanalysen von erfolgreichen oder gelungenen Unterrichtsgesprächen: z.B. Cobb, Wood & Yackel, 1993; Forman, Larreamendy-Joerns, Stein & Brown, 1998; Kovalainen & Kumpulainen, 2005; Leinhardt, 2005; Mortimer & Scott, 2003; systematische und z.T. vergleichende Untersuchungen: z.B. Seidel, Rimmel & Prenzel, 2003; Turner et al., 2002). Stellt man sich diesen Fragen bei der Analyse des eigenen Unterrichts oder in der Lehr-Lernforschung, dann muss man folgende drei Ebenen berücksichtigen (vgl. Renshaw, 2004, S. 10f.):

Die individuelle Ebene:	Im Problemlösegespräch werden kognitive und metakognitive Prozesse angeregt, unterstützt, verinnerlicht und damit angeeignet.
Die soziale bzw. interaktive Ebene:	Problemlösen und Lernen ist in seiner mentalen Tiefenstruktur zwar letztlich immer individuell zu vollziehende In-Beziehung-Setzung von Aspekten oder Elementen. Daraus abzuleiten, Mathematik finde deshalb nur in voneinander isolierten Gehirnen statt, ist aber falsch, weil – ausser mit der längst überholten nominalistischen und konzeptualistischen Ideenlehre Platons – nicht erklärt werden kann, wie die Mathematik in diese Gehirne hineinkommt. Deshalb stellt sich für die Didaktik die Frage, durch welche sozialen Impulse und Arrangements diese In-Beziehung-Setzung angeregt und begleitet werden kann. Heinrich Bauersfeld hat dies wie folgt ausgedrückt: „Woher kommen die Korrekturen, der Hinweis auf Änderungsbedürftigkeit, der Anstoss zum ‚Umstrukturieren‘, wenn wir nicht erwarten dürfen, dass z.B. die mathematischen Strukturen sich aus der Widerständigkeit der ‚Welt‘, also durch Empirie allein, ‚ablesen‘ oder ‚entdecken‘ oder ‚abstrahieren‘ lassen? Die Antwort lässt sich nur auf der sozialen Ebene der Lehrprozesse geben. Lernen ist nicht nur aktiv, es ist interaktiv“ (Bauersfeld, 1993, S. 279).
Die Ebene der Identitäts- und Gemeinschaftsbildung:	Hier geht es um die Entwicklung und Aufrechterhaltung von Normen und Standards des Denken, Problemlösens und Kommunizierens in der „mathematical community“, was natürlich im Unterricht nur geschehen kann, wenn die Lehrperson zu dieser community gehört. Letzteres ist mir ein besonderes Anliegen, denn ich stelle insbesondere in der Schweiz fest, dass zahlreiche an Pädagogischen Hochschulen tätige MathematikdidaktikerInnen kein Mathematikstudium absolviert haben und deshalb im mathematischen Fachdiskurs nicht mithalten können.

Obschon die soziokulturalistische Unterrichtsgesprächsforschung noch sehr jung ist, weiss man über die Qualität von didaktischer Kommunikation beim Problemlösen doch bereits einiges. Was allerdings noch fehlt, sind genauere Kriterien zum Messen dieser Qualität. Dies ist u.a. auch ein Ziel eines meiner nächsten Forschungsprojekte.

4. Welches Verhalten der Lehrperson führt zu einer hohen Qualität der didaktischen Kommunikation beim Problemlösen?

Die Qualität der didaktischen Kommunikation beim Problemlösen ist dann hoch,

- wenn die Lehrperson die Lernenden in ihrer Vorstellungs- und Erfahrungswelt abgeholt;
- wenn die Lehrperson mit Scaffolding, welches eine Konkretisierung des „Prinzips der minimalen Hilfe“ (Aebli) darstellt, den Übergang vom angeleiteten zum selbstgesteuerten Problemlösen

stützt.

Der Begriff „Scaffolding“, wie er ursprünglich im Baugewerbe verwendet wurde, bezeichnet ein temporäres Gerüst, das rund um ein zu bauendes Gebäude aufgestellt wird, damit die Handwerker sicher und ohne unnötigen Kraft- und Balancieraufwand arbeiten können. In einer ähnlichen Art und Weise meint Scaffolding im Lehr-Lernkontext eine personale oder materiale Unterstützung, die die Lehrperson den Lernenden beim Aufbau von Wissensstrukturen auf dem Weg von der Fremd- zur Selbstregulation vorübergehend bietet (Wood, Bruner & Ross, 1976). Scaffolding will Autonomie in Bezug auf kognitive und motivationale Selbstregulation fördern (Meichenbaum & Biemiller, 1998) und versucht zwischen dem Ausmass und der Art der Hilfestellungen und der sich verändernden Autonomie der Lernenden eine optimale Passung herzustellen (vgl. Lepola et al., 2004; Meichenbaum & Biemiller, 1998). Konkret bedeutet Scaffolding z.B.:

- die Aufgabenschwierigkeit sensibel und flexibel dem Können der Lernenden anpassen;
- den Lernenden helfen, die entscheidenden Zusammenhänge zu erkennen und zu formulieren;
- minimal nötige Unterstützung geben, nur so viel, dass die Aufgabe noch herausfordernd bleibt;
- Hilfe versiegen lassen, wenn die Lernenden die Aufgabe mit eigenen Mitteln bewältigen können (fading = verblassen);

Scaffolding ist dann suboptimal oder sogar schädlich, wenn es zu unterstützend, zu direktiv, aufdringlich, überfordernd (zu hohe Erwartung an die Lernenden bei ungenügender Unterstützung), unklar (zu abstrakt oder zu vage), unsensibel (Lehrperson merkt nicht, wann sie helfen muss) oder zum falschen Zeitpunkt erfolgt (Salonen, Vauras & Efklides, 2005; Vauras, Salonen, Lehtinen & Lepola, 2001). Solches Verhalten von Lehrpersonen fördert die Selbstregulation der Lernenden nicht, oder wirkt sogar hemmend auf sie.

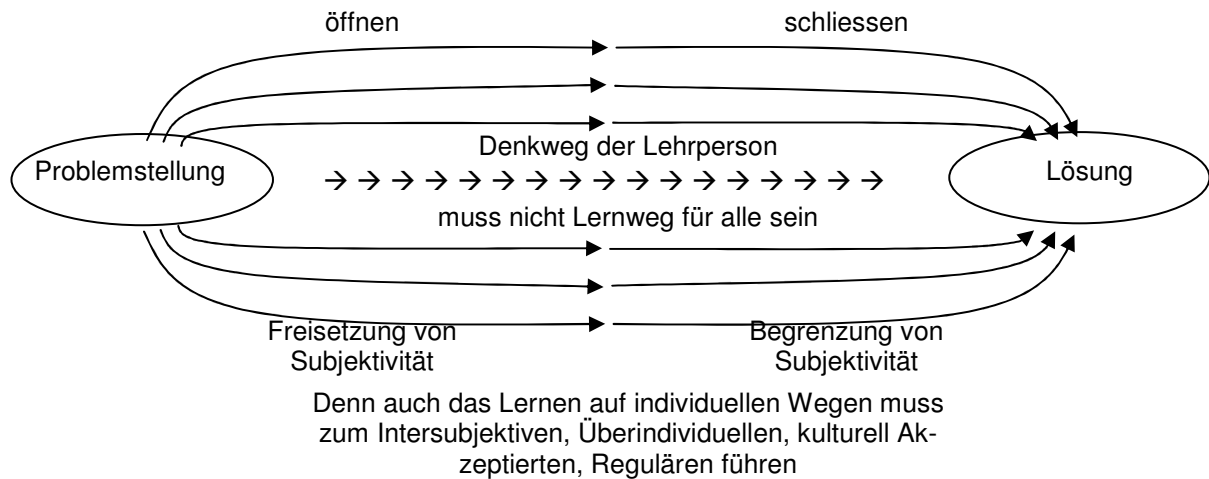
Möglichst symmetrische, egalitäre und schwach komplementäre Formen der interpersonalen Koordination sorgen am ehesten dafür, dass die Motivation der Lernenden für Selbstregulation hoch ist und somit die Verantwortung für das Lernen schrittweise von der Lehrperson auf die Lernenden übergehen kann. Im Gegensatz dazu kann zu starke Dominanz der Lehrperson (übermässig hilfreich, zu direktiv, aufdringlich, kompetitiv = konkurrierend, zu anspruchsvolle Hilfestellungen gebend) zur Zerstörung der intrinsischen Motivation und der Motivation für Selbstregulation führen, was natürlich im Widerspruch steht zu den Prinzipien des Scaffolding. Problemlösefördernde Interaktionen entstehen also dann, wenn die Lehrperson beim Scaffolding ihre Aufmerksamkeit nicht nur auf die individuell-kognitiven, die interaktiven (sozio-kognitiven) und auf die identitäts- und gemeinschaftsbildenden Aspekte richtet, sondern auch auf die sozio-emotionalen.

Eine spezielle Form des Scaffolding stellen Skripts dar, die als schriftliche Anleitungen beim Problemlösen das Externalisieren von Überlegungen, das Vergleichen von Sichtweisen, das Artikulieren von Positionen und das Argumentieren strukturieren.

Die Qualität der adaptiven didaktischen Kommunikation beim Problemlösen ist weiter denn hoch,

- wenn die Lehrperson als Fachexperte, d.h. als Repräsentant des kulturell akzeptierten Wissens und als konkretes Verhaltensmodell, Tutor, Lerngerüst, Coach und Lernhelfer agiert und die Lernenden sowohl auf der fachlichen als auch auf der Lernprozess- und Interaktionsebene adaptiv unterstützt;
- wenn die Lehrperson dafür sorgt, dass die Lernenden miteinander reden, auf Äusserungen ihrer Vorredner eingehen und nicht parallel ablaufende Selbstgespräche führen;
- wenn die Lehrperson den Dialog mit und unter Lernenden fördert, dafür sorgt, dass weniger „Wahrheiten ausgeteilt“ als vielmehr Fragen gestellt, Bedeutungen ausgehandelt, Hypothesen kritisiert sowie Widersprüche und Fehler diskutiert werden (Dubs, 1995; Reusser, 1999);
- wenn die Lehrperson auf Schülerbeiträge eingeht, also „revoicing“ betreibt (O'Connor & Michaels, 1996), d.h. die Lernenden beim Externalisieren ihrer Überlegungen, beim Vergleichen von Sichtweisen, beim Zusammenfassen und beim Artikulieren ihrer Position professionell unterstützt;
- wenn die Lehrperson die Klasse bzw. das Problemlöseteam als Gemeinschaft von „Forschenden“ und Lernenden, als „Wissensbildungsgemeinschaft“ betrachtet;
- wenn die Lehrperson das Gespräch zuerst öffnet und Singularität und Subjektivität zulässt, aber dann auch begrenzt, auf den Punkt bringt und Regularität anstrebt. Denn mathematische Aufgaben haben in der Regel nicht so viele „viable“ (überlebensfähige) Lösungen (von Glasersfeld, 1987) wie es Lernende in der Klasse hat, und deshalb muss auch das Aufgabenlösen auf individuellen Wegen schlussendlich zum Intersubjektiven, Überindividuellen, kulturell Akzeptierten führen. Es gilt eine Balance zu finden zwischen dem Zulassen individueller „Lösungen“ und dem Erfüllen der Standards der „mathematical community“.

Vom Individuell-Singulären zum Intersubjektiv-Regulären (Reusser, 2006, S. 166):



- wenn die Lehrperson mit Fragen, Impulsen oder Gesichtspunkten auf der inhaltlichen Ebene Fokusbildungen ermöglichen, d.h. als „focal navigator“ wirkt und dafür sorgt, dass die Lernenden auf der meta-diskursiven Ebene vertieft und ganz in Anspruch genommen sind (Sfard, 2002b; Sfard & Kieran, 2001b). Beide Aspekte, der inhaltliche und der meta-diskursive, führen zu mehr Kohäsion und damit zu einer grösseren Wirksamkeit und Qualität des Problemlösegesprächs;
- wenn die Lehrperson dafür sorgt, dass alle Gesprächsteilnehmer zu jeder Zeit wissen, worüber geredet wird, und davon überzeugt sind, dass sich die gleichen Begriffe auf die gleichen Sachverhalte beziehen. Denn kompatible Fokusse in einem Team sind der wichtigste Indikator für die Effektivität des Diskurses;
- wenn die Lehrperson dafür sorgt, dass die Lernenden daran interessiert sind, die Qualität und Wirksamkeit ihrer Kommunikation zu kontrollieren und bei Pannen und Einbrüchen immer wieder sicherzustellen bzw. zu reparieren;
- wenn die Lehrperson als Fachexperte wirkt, welcher die Tücken des Problems kennt, als personales Problemlösegerüst (scaffold), welches individuell abgestimmte instruktionale Hilfestellung zu geben vermag, als einführender Dialogpartner und fachlich-pädagogischer Coach (Staub, 2004), der nicht nur zuhört, sondern die besten Kräfte der Lernenden herauszufordern versucht, als Anreger von Reflexion und Metainteraktion sowie als Quelle von Feedback;
- wenn die Lehrperson rasch wechseln kann zwischen Detailansichten und Überblicken („zoom“ in and out), gewandt verschiedene Darstellungen einsetzen, Teilziele über verschiedene Wege erreichen kann, Fehler rasch bemerkt und korrigiert und an der Interaktion mit den Lernenden interessiert ist;
- wenn die Lehrperson ruhig und strukturiert vorgeht;
- wenn die Lehrperson die Lernenden zum Antworten anspornt, an ihrem Denken interessiert ist, sehr genau auf eventuelle Fehlüberlegungen achtet, ab und zu ihr Verständnis prüft, also hoch interaktives, bidirektionales Verhalten zeigt;
- wenn die Lehrperson so wie Schoenfeld (1985a/b) vorschlägt als „intellectual coach“ bzw. als „roving consultant“ wirkt. Denn er weiss, dass Strategien, Heuristiken und allgemein Metakognitives nicht gelehrt, aber eingebettet in fachlichen und eben interaktiven Kontexten sehr wohl immersiv gelernt werden können. Ein guter Problemlöser wird man durch Sozialisation bzw. Enkulturation, „by becoming a member of the particular community of practice“ (Schoenfeld, 1992, p. 344), in der sich eine mathematische Perspektive und ein mathematischer Standpunkt (mathematical point of view), also eine mathematische Einstellung bilden können. Diese soziokulturalistische Perspektive ist in der Lehr-Lernforschung theoretisch und empirisch bereits recht gut gestützt; aber in der mathematikdidaktischen Literatur ist sie noch relativ neu. Als „intellectual coach“ bzw. als „roving consultant“ zu wirken heisst für Schoenfeld (1985a/b, 1987) eine Situation zu schaffen, in der die in Kleingruppen arbeitenden Schüler nicht einfach warten, sondern aktiv nach Information und Tipps suchen. Aber Schoenfeld ist zurückhaltend im Geben von Informationen oder Hinweisen. Viel eher stellt er (heuristische) Fragen der Art, wie sie Pólya (1949) in seiner „Schule des Denkens“ formuliert hat. Ist das Problemlöseteam einmal angekurbelt, übt die Lehrperson die Rolle des „umherschweifenden Beraters“, eben des „roving consultant“ aus, der zu jeder Zeit das Recht hat, den Schülern folgende drei Fragen (Schoenfeld, 1985b, p. 373f., spricht von „generic“ bzw. „executive“ questions) zu stellen:
(1) What (exactly) are you doing (can you describe it precisely)?

(2) Why are you doing it (how does it fit into the solution)?

(3) How does it help you (what will you do with the outcome when you obtain it)?

Weil es für die Lernenden peinlich wäre, nicht zu wissen, was sie weshalb im Moment machen bzw. denken, beginnen sie sich vorzubereiten, indem sie u.a. über die Fragen diskutieren und sich Antworten zurechtlegen. Diese aus einer Betroffenheit abgeleitete Massnahme ist ein guter Katalysator zur Verinnerlichung dieser Fragen. Je häufiger diese Fragen im Voraus beantwortet werden, desto mehr wird die Überwachung des Problemlösens zur Gewohnheit. Die Verinnerlichung dieser Fragen führt zu immer mehr Selbststeuerung, was zur Folge hat, dass der „roving consultant“ seine Frageaktivität (Fremdsteuerung) allmählich bis auf null reduzieren kann. Denn seine indirekte, sozial medierte Wirkung ist eingetreten: Die kooperativ problemlösenden Schüler sind „in control“ (Schoenfeld, 1985b, p. 375).

Als „intellectual coach“ bzw. als „roving consultant“ stellt also Schoenfeld, von Zeit zu Zeit zwecks Entwicklung einer gewohnheitsmässigen Selbstüberwachung und Selbststeuerung folgende Fragen, die von den Lernenden ohne langes Nachdenken beantwortet werden müssen: „Was (genau) machst bzw. denkst du jetzt gerade?“, „Warum machst bzw. denkst du das?“ „Weshalb und inwieweit soll es dir weiterhelfen?“ Weil die Lernenden mit diesen Fragen rechnen, bereiten sie sich darauf vor und tun dabei genau das, was als „metakognitive Überwachung“ bzw. als „Monitoring“ bezeichnet wird. Schoenfeld führt also die Lernenden nicht direkt, z.B. mit der Aufforderung „Du sollst deine Gedanken überwachen!“, sondern indirekt mit dem Trick der „drohenden“ Fragen zu metakognitiver Bewusstheit, was ihm laut seinen Aussagen auch gelingt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Qualität der didaktischen Kommunikation beim Problemlösen dann hoch ist, wenn die Lehrperson über adaptive Lehrkompetenz verfügt. Oder anders formuliert: Pólyas Heuristik vermag nur dann die Problemlösekompetenz der Lernenden zu fördern, wenn sie von einer adaptiv handelnden Lehrperson interaktiv in Form der „cognitive apprenticeship“ (modeling, coaching, scaffolding, fading) (Collins et al., 1989) vermittelt und angewendet wird.

Dieses schöne Findeverfahren bringt also nur dann einen Kompetenzzuwachs, wenn es durch einen kompetenten Problemlöser – eben in der Regel die Lehrperson – näher an die Lernenden und näher an die Situation gebracht, also person- und bereichsspezifischer gemacht wird. Das erfordert nicht nur didaktisch sondern vor allem mathematisch kompetente Lehrpersonen oder TutorInnen.

5. Zum Schluss zwei Beispiele von qualitativ guten Problemlösegesprächen mit hoher adaptiver Lehrkompetenz

Beispiel 1 (aus Maier & Beck, 2006):

- Aufgabenstellung: Bestimme die Länge der Diagonale eines Quaders, dessen Länge, Breite und Höhe bekannt sind.
- Voraussetzungen des Schülers: Satz des Pythagoras mit einigen Anwendungen
- Konkretes Beispiel: Klassenzimmer, dessen Ausmasse grob abgeschätzt werden
- Lehrer-Schüler-Gespräch: (Lehrer ist Fragender) (
- L: Was ist unbekannt?
- S: Die Länge der Diagonale eines Quaders.
- L: Was ist gegeben?
- S: Die Länge, die Breite und die Höhe des Quaders.
- L: Zeichne den Quader und führe passende Bezeichnungen ein! Wie wollen wir die Unbekannte nennen?
- S: x
- L: Welche Buchstaben willst du für die Länge, Breite und Höhe wählen?
- S: a, b, c
- L: Wie lautet die Bedingung, durch die a, b, c und x verknüpft werden?
- S: x ist die Diagonale des Quaders, in dem a, b und c die Länge, Breite und Höhe sind.
- L: Ist es eine sinnvolle Aufgabe? Ich meine damit, ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen?
- S: Ja. Wenn wir a, b und c kennen, so kennen wir den Quader. Wenn aber der Quader bestimmt ist, so ist die Diagonale bestimmt.
- L: Kennst du eine verwandte Aufgabe?
- S: ...
- L: Betrachte die Unbekannte! Kennst du eine Aufgabe, die dieselbe Unbekannte hat?
- S: ...

- L: Nun, was ist unbekannt?
 S: Die Diagonale des Quaders.
 L: Kennst du eine Aufgabe mit einer ähnlichen Unbekannten?
 S: Nein. Wir haben noch keine Aufgabe über die Diagonale eines Quaders gehabt.
 L: Kennt ihr eine Aufgabe mit einer ähnlichen Unbekannten?
 L: Ihr seht, die Diagonale ist ein Segment, das Segment von einer Geraden. Habt ihr niemals eine Aufgabe gelöst, deren Unbekannte die Länge einer Geraden war?
 S: Doch, natürlich haben wir solche Aufgaben gelöst. Z. B. die Seite eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden.
 L: Gut! Das ist eine Aufgabe, die eurer Aufgabe verwandt ist und die ihr schon gelöst habt. Könntest du sie gebrauchen?
 S: ...
 L: Du erinnerst dich glücklicherweise an eine Aufgabe, die der vorliegenden verwandt ist und die du schon früher gelöst hast. Willst du sie nicht verwenden? Könntest du irgendeine Hilfsgröße einführen, damit du sie verwenden könntest?
 S: ...
 L: Pass auf! Die Aufgabe, an die du dich erinnerst, handelt von einem Dreieck. Erkennst du in deiner Figur irgend ein Dreieck?

Weiterführende Fragen (falls der Schüler immer noch kein Dreieck erkennt):

- Würdet ihr gern ein Dreieck in der Figur haben?
- Welche Art von Dreieck hättet ihr am liebsten in der Figur?
- Ihr könnt die Diagonale noch nicht finden; aber ihr sagt, dass ihr eine Seite eines Dreiecks finden könnt. Nun, was wollt ihr tun?
- Könntet ihr die Diagonale finden, wenn sie die Seite eines Dreiecks wäre?

S: zeichnet Dreieck ein

L: Ich glaube, dass es eine gute Idee war, dieses Dreieck zu zeichnen. Du hast nun ein Dreieck; aber hast du auch die Unbekannte?

S: Die Unbekannte ist die Hypotenuse des Dreiecks. Wir können sie nach dem Satz von Pythagoras berechnen.

L: Du kannst es, wenn beide Schenkel bekannt sind; aber sind sie das?

S: Ein Schenkel ist gegeben, das ist c. Und der andere, glaube ich, ist nicht schwer zu finden. Natürlich, der andere Schenkel ist die Hypotenuse eines anderen rechtwinkligen Dreiecks.

L: Sehr gut! Nun sehe ich, dass du einen Plan hast.

Beispiel 2 (aus Zech, 2002):

Zwei Orte A und B liegen 245 km voneinander entfernt. In Ort A startet ein Auto in Richtung Ort B und legt durchschnittlich in einer Stunde 60 km zurück. Gleichzeitig startet in Ort B ein Auto in Richtung Ort A und legt in der Stunde durchschnittlich 80 km zurück. Während die beiden Autos losfahren, startet gleichzeitig ein Hubschrauber in Ort A. Der Hubschrauber fliegt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 240 km/h in Richtung Ort B. In dieser Richtung fliegt er so lange, bis er auf das Auto aus B trifft. Er wendet ohne Zeitverlust und fliegt in Richtung Ort A, bis er auf das Auto, das in Ort A gestartet ist, trifft. Auf diese Weise fliegt der Hubschrauber immer zwischen den beiden Autos hin und her, bis die Fahrzeuge sich treffen. Wie viele Kilometer legt der Hubschrauber währenddessen zurück?

Adaptives Lehrverhalten besteht hier u.a. aus folgender Frage, die die Problemlösenden auf die entscheidende Fahrt bringen könnte: Wie lange ist der Helikopter in der Luft?

Lösung:

Wie lange ist der Helikopter mit der Geschwindigkeit von 240 km/h unterwegs?

$$\frac{245}{(60 + 80)} = 1.75 \rightarrow 1\frac{3}{4} \text{ Stunden}$$

$$\frac{245}{(60 + 80)} \cdot 240 = 420 \rightarrow \text{Der Helikopter legt insgesamt 420 km zurück}$$

Literatur

- Aebli, H. (1961). *Grundformen des Lehrens. Ein Beitrag zur psychologischen Grundlegung der Unterrichtsmethode* (9. erweiterte und umgearbeitete Auflage 1976). Stuttgart: Klett.
- Aebli, H. (1983). *Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage* (12. Auflage 2002). Stuttgart: Klett.
- Bakhtin, M.M. (1981). *The dialogic imagination*. Austin, TX: University of Texas Press.
- Bakhtin, M.M. (1986). *Speech genres and other late essays* (V. W. McGee, Trans.; C. Emerson & M. Holquist, Eds.). Austin: University of Texas Press.
- Bauersfeld, H. (1993). Tätigkeitstheorie und radikaler Konstruktivismus. In H. Ballhorn & H. Brügelmann (Hrsg.), *Bedeutungen erfinden – im Kopf, mit Schrift und miteinander*. Jahrbuch der Gesellschaft für Lesen und Schreiben, 5. Konstanz: Libelle Wissenschaft.
- Cazden, C. (1986). Classroom discourse. In M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 432-462). New York: MacMillan.
- Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31 (3/4), 175-190.
- Cobb, P. (1996). Accounting for mathematics learning in the social context of the classroom. In C. Alsina, J.M. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde & A. Perez (Eds.), *Eighth International Congress of Mathematics Education: Selected lectures* (pp. 85–99). Sevilla, Spain: S.A.E.M. Thales.
- Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. In E.A. Forman, N. Minick & C.A. Stone (Eds.), *Contexts for learning. Sociocultural dynamics in children's development* (pp. 91-119). New York: Oxford University Press.
- Collins, A., Brown, J.S. & Newman, S.E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- De Corte, E., Op'tEynde, P. & Verschaffel, L. (2002). „Knowing what to believe“: The relevance of students' mathematical beliefs for mathematics education. In B.K. Hofer & P.R. Pintrich (Eds.), *Personal epistemology: The psychology of beliefs about knowledge and knowing* (pp. 297-320). Mahwah, N.J.: Erlbaum.
- Doise, W. & Mugny, G. (1984). *The Social Development of the Intellect*. Oxford: Pergamon Press.
- Dubs, R. (1995). Konstruktivismus: Einige Überlegungen aus der Sicht der Unterrichtsgestaltung. *Zeitschrift für Pädagogik*, 41(6), 889-903.
- Forman, E.A., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M.K. & Brown, C.A. (1998). „You're going to want to find out which and prove it“: Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction*, 8 (6), 527-548.
- Gamoran, A. & Nystrand, M. (1991). Background and instructional effects on achievement in-eighth-grade English and social studies. *Journal of Research on Adolescence*, 1, 277-300.
- Gaudig, H. (1909). *Didaktische Präludien*. Leipzig: Teubner.
- Goodman, J.F. & Linn, M.I. (2003) «Maladaptive» Behaviours in the young child with intellectual disabilities: A reconsideration. *International Journal of Disability, Development and Education*, 50, 137-148.
- Granic, I. & Lamey, A.V. (2002). Combining dynamic Systems and multivariate analyses to compare the mother-child interactions of externalizing subtypes. *Journal of Abnormal Child Psychology*, 30, 265-283.
- Grell, J. & Grell, M. (1990). *Unterrichtsrezepte*. Weinheim: Beltz.
- Hicks, D. (1996). Contextual inquiries: a discourse-oriented study of classroom learning. In D. Hicks (Ed.), *Discourse, learning, and schooling*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Klieme, E., Schümer, G. & Knoll, S. (2001). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: „Aufgabekultur“ und Unterrichtsgestaltung. In E. Klieme & J. Baumert (Hrsg.), *TIMSS - Impulse für Schule und Unterricht* (S. 43-57). Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung.
- Kovalainen, M. & Kumpulainen, K. (2005). The discursive practice of participation in an elementary classroom Community. *Instructional Science*, 33, 213-250.
- Kovalainen, M., Kumpulainen, K. & Vasama, S. (2001). Orchestrating classroom interaction in a community of inquiry: Modes of teacher participation. *Journal of Classroom Interaction*, 36 (2), 17-28.

- Leinhardt, G. (2005). Seeing the complexity of standing to the side: Instructional dialogues. *Cognition and Instruction*, 23 (1), 87-163.
- Lepola, J., Salonen, P., Vauras, M. & Poskiparta, E. (2004). Understanding the development of sub-normal performance in children from a motivational-interactionist perspective. In H. Switzky (Ed.), *International review of research in mental retardation: Vol. 28. Personality and motivational Systems in mental retardation* (pp. 145-189). San Diego, CA: Eisevier - Academic press.
- Lewis, M. D., Lamey, A. & Douglas, L. (1999). A new dynamic Systems method for the analysis of early socioemotional development. *Developmental Science*, 2,457-475.
- Mahoney, G. & Wheeden, C.A. (1999). The effect of teacher style on interactive engagement of pre-school-aged children with special learning needs. *Early Childhood Research Quarterly*, 14, 51-68.
- Maier, J. & Beck, S. (2006). Förderung mathematisch begabter SchülerInnen/mathematische Wettbewerbe. <http://www.ph-heidelberg.de/wp/filler/lv-alt/sem-begabfoerd/Vortrag-2-Problemloesen-Polya.pdf>.
- Meichenbaum, D. & Biemiller, A. (1998). *Nurturing independent learners*. Brookline: MA: Brookline Books.
- Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge. Talk amongst teachers and learners*. Clevedon: Multilingual Matters.
- Meyer, H. (1987). *UnterrichtsMethoden II: Praxisband* (3. Aufl.). Frankfurt a.M.: Comelsen Scriptor.
- Mortimer, E. & Scott, P. (2003). *Meaning making in secondary science classrooms*. Maidenhead: Open University Press.
- Muis, K.R. (2004). Personal epistemology and mathematics: A critical review and synthesis of research. *Review of Educational Research*, 74(3), 317-377.
- O'Connor, M. C. & Michaels, S. (1996). Shifting participant frameworks: orchestrating thinking practices in group discussion. In D. Hicks (Ed.), *Discourse, learning, and schooling* (pp. 63-103). Cambridge: Cambridge University Press.
- Palincsar, A.S. & Brown, A.L. (1984). Reciprocal teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities. *Cognition and Instruction*, 1(2), 117-175.
- Perret-Clermont, A.N. (1980). *Social interaction and cognitive development in children*. London: Academic Press.
- Pólya, G. (1949): *Schule des Denkens*. Bern: Francke
- Pomerantz, E. M. & Eaton, M. M. (2001). Maternal intrusive support in the academic context: Transactional socialization processes. *Developmental Psychology*, 37, 174-186.
- Renshaw, P. (2004). Dialogic learning, teaching, and instruction. Theoretical roots and analytical frameworks. In J. Van der Linden & P. Renshaw (Eds.), *Dialogic learning. Shifting perspectives to learning, instruction, and teaching* (pp. 1-15). Dordrecht: Kluwer.
- Reusser, K. & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution – The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, 7(4), 309-327.
- Reusser, K. (1999). „Und sie bewegt sich doch“ – Aber man behalte die Richtung im Auge. Zum Wandel der Schule und zum alt-neuen Rollenverständnis von Lehrerinnen und Lehrern. *die neue schulpraxis, themenheft 99*, 11-15.
- Reusser, K. (2001). Co-constructivism in educational theory and practice. In N.J. Smelser, P. B. Baltes & F.E. Weinert (Eds.), *International encyclopedia of the social and behavioral sciences* (pp. 2058-2062). Oxford: Pergamon/Elsevier Science.
- Reusser, K. (2006). Konstruktivismus – vom epistemologischen Leitbegriff zur Erneuerung der didaktischen Kultur. In Baer, M. et al. (Hrsg.), *Didaktik auf psychologischer Grundlage. Von Hans Aebli's kognitionspsychologischer Didaktik zur modernen Lehr-Lernforschung* (S. 151-168). Bern: hep.
- Rosenshine, B. & Meister, C. (1994). Reciprocal teaching: A review of the research. *Review of Educational Research*, 64(4), 479-530.
- Salonen, P., Vauras, M. & Efklides, A. (2005). Social interaction - What can it tell us about metacognition and co-regulation in learning? *European Psychologist*, 10, 199-208.
- Schneeberger, M. (2007). *Verstehen und Lösen von Textaufgaben im Dialog – Der Erwerb von Mathematisierungskompetenz als Initiation in eine spezielle Diskurspraxis*. Universität Zürich: Unveröffentlichte Dissertation.

- Schoenfeld, A.H. (1985a). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A.H. (1985b). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In E.A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, pp. 361-379. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schoenfeld, A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
- Schoenfeld, A.H. (1996). In fostering communities of inquiry, must it matter that the teacher knows the "answer"? *For the Learning of Mathematics*, 16(3), pp. 11-16.
- Seidel, T., Rimmel, R. & Prenzel, M. (2003). Gelegenheitsstrukturen beim Klassengespräch und ihre Bedeutung für die Lernmotivation. *Unterrichtswissenschaft*, 31 (2), 142-165.
- Sfard, A. & Cole, M. (2002). *Literate mathematical discourse: What it is and why should we care?* → <http://lchc.ucsd.edu/vegas.htm> [22.08.06]
- Sfard, A. & Kieran, C. (2001a). Preparing teachers for handling students' mathematical communication, Gathering knowledge and building tools. In E.L. Lin & T. Cooney (Eds.), *Making Sense of Mathematics Teacher Education* (pp. 185-207), Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sfard, A. & Kieran, C. (2001b). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talk through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity*, 8(1), 42-76.
- Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 191-228.
- Sfard, A. & McClain, K. (2002). Analyzing tools. Perspectives on the role of designed artifacts in mathematics learning. *The Journal of the Learning Sciences*, 11(2&3), 153-161.
- Sfard, A. & Thompson, P.W. (1992). Problems of reification: representations and mathematical objects. In D. Kirshner (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – North America, Plenary Sessions*, vol. 1 (pp. 1–32), Baton Rouge, LA: Louisiana State University, 1992,.
- Sfard, A. (1988). Operational versus structural methods of teaching mathematics: A case study. *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 560-567). Budapest, Hungary.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical notions and the quandary of reification - the case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Monograph No. 25, pp. 59-84). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.
- Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 44-55.
- Sfard, A. (1996). On acquisition metaphor and participation metaphor for mathematics learning. In C. Alsina, J.M. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures* (pp.397-411). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.
- Sfard, A. (1997). Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. In L.D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 339-372). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Sfard, A. (1998a). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4-13.
- Sfard, A. (1998b). The many faces of mathematics: Do mathematicians and researchers in mathematics education speak about the same thing? In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 491–512). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Sfard, A. (2000a). Symbolizing mathematical reality into being – or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K.E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Sym-*

- bolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sfard, A. (2000b). Steering (dis)course between metaphor and rigor: Using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), 296-327.
- Sfard, A. (2000c). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 157-189.
- Sfard, A. (2001). Learning mathematics as developing a discourse. In R. Speiser, C. Maher & C. Walter (Eds.), *Proceedings of 21 st Conference of PME-NA* (pp. 23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Sfard, A. (2002a). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. In C. Kieran, E. Forman & A. Sfard (Eds.), *Learning discourse. Discursive approaches to research in mathematics education* (pp. 13-57). Dordrecht: Kluwer.
- Sfard, A. (2002b). The interplay of intimations and implementations. Generating new discourse with new symbolic tools. *The Journal of the Learning Sciences*, 11(2&3), 319-357.
- Sfard, A. (2003). Balancing the unbalanceable: The NCTM standards in light of theories of learning mathematics. In J. Kilpatrick, W.G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 353-392). Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics.
- Sfard, A. (2005). Essential Dialogue. Essay review of 'Dialogicality and social Representations: The Dynamic of Mind' by I. Marková. *Human Development*, 48, 363-370.
- Staub, F.C. (2004). Fachspezifisch-pädagogisches Coaching. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 7 (Beiheft 3), 113-141.
- Turner, J.C., Midgley, C., Meyer, D.K. et al. (2002). The classroom environment and students' reports of avoidance strategies in mathematics: A multimethod study. *Journal of Educational Psychology*, 94 (1), 88-106.
- Vauras, M., Salonen, P., Lehtinen, E. & Lepola, J. (2001). Long-term development of motivation and cognition in family and school contexts. In S. Volet & S. Järvelä (Eds.), *Motivation in learning contexts: Theoretical advances and methodological implications* (pp. 295-315). London: Pergamon Press.
- Voigt, J. (1994). Entwicklung mathematischer Themen und Normen im Unterricht. In H. Maier & J. Voigt (Eds.), *Verstehen und Verständigung* (S. 77-111). Köln: Aulis.
- von Glasersfeld, E. (1987). *Wissen, Sprache und Wirklichkeit*. Braunschweig: Vieweg.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Wertsch, J.V. (1991). *Voices of the mind. A sociocultural approach to mediated action*. Cambridge: Harvard University Press.
- Wood, D., Bruner, J.S. & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17, 89-100.
- Wyndhamn, J. & Säljö, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning: A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction*, 7, 361-382.
- Zech, F. (2002¹⁰). *Grundkurs Mathematikdidaktik: Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen im Fach Mathematik*. Weinheim: Beltz,

Die Diskussion, die nach dem Referat zu kurz kam, kann über folgende Adresse digital fortgesetzt werden:

martin.schneeberger@phbern.ch

Zu meiner Person

Im Moment arbeite ich als Dozent für Mathematik und Mathematikdidaktik an der Pädagogischen Hochschule in Bern.

Ich habe in Bern Mathematik studiert und in einem Zweitstudium bei Hans Aebli Pädagogische Psychologie, 1996 war ich als Forschungsassistent bei Alan Schoenfeld an der University of California in Berkeley (USA), und 2007 habe ich bei Kurt Reusser in Zürich dissertiert.