Francesca BIAGINI, München, Daniel ROST, München

Money out of nothing? - Prinzipien und Grundlagen der Finanzmathematik

Die Finanzmathematik hat als jüngste mathematische Disziplin in den letzten 15 Jahren einen gewaltigen Aufschwung erlebt. Ihre Bedeutung hat jedoch noch kaum einen Niederschlag in der Schulmathematik gefunden. Dabei könnten finanzmathematische Konzepte nicht nur auf Projekttagen behandelt, sondern auch gut in den Unterricht integriert werden. Auch unter diesem Gesichtspunkt sind die folgenden Kapitel zu lesen, in denen wir die wichtigsten mathematischen Grundkonzepte für effiziente Finanzmärkte, bis hin zur berühmten Black-Scholes Formel, vorstellen wollen.

1. Ein verlockendes Angebot ...

Wir betrachten die Aktie der Munich Re (Münchener Rück) und gehen von einem heutigen (April 2010) Kursstand von 125 Euro aus. Ihr Bankberater bietet Ihnen dazu, zu einem gewissen, sofort zu entrichtenden Preis, folgendes "Geschäft" an:

Wenn der Kurs S_T der Aktie der Munich Re zum Zeitpunkt T = April 2011 größer als $K = 96$ (Euro) ist, bekommen Sie von ihm die Differenz zu K ausgezahlt; wenn er kleiner ist, bekommen Sie nichts.

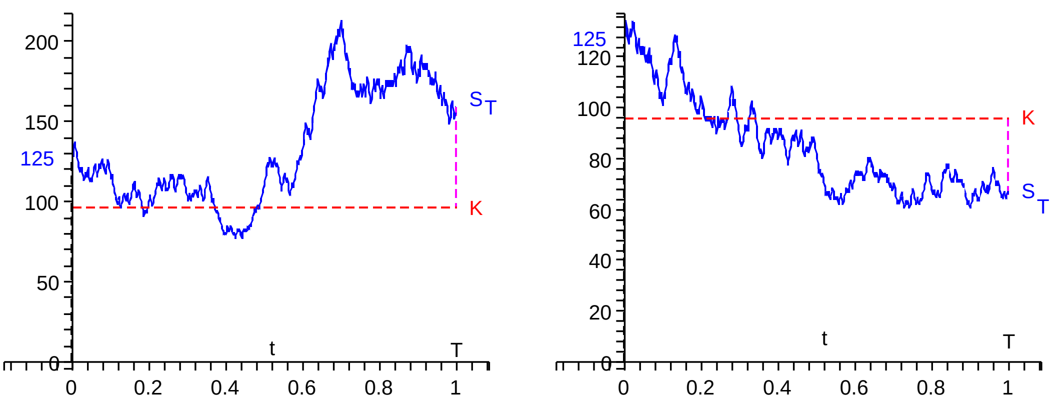
In der Finanzmathematik nennt man ein solches Geschäft eine **Call-Option** auf die Aktie der Munich Re (in diesem Zusammenhang auch **Underlying** genannt) mit **Strike** $K = 96$ und **Fälligkeitszeitpunkt** T = April 2011.

Die Call-Option liefert dann die **Auszahlung**

$$C := \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+.$$

Was Sie an Auszahlung bekommen, hängt also vom zukünftigen, heute noch ungewissen Kursstand der Aktie in 1 Jahr ab. Das folgende Bild zeigt zwei mögliche Kursverläufe, ausgehend von einem heutigen Kursstand von $S_0 = 125$ Euro.

$S_T > K$: $S_T \leq K$:



Im linken Schaubild landet der Kurs in T oberhalb von K, Sie erhalten also die Auszahlung $C = S_T - K > 0$. Im Fall rechts ist $S_T < K$, also ist $C = 0$.

Eine Call-Option ist ein gängiges Finanzinstrument zur Absicherung gegen *steigende* Kursverläufe. In der Tat, wenn Sie die Munich Re Aktie zum Zeitpunkt T erwerben, aber dafür nicht mehr als $K = 96$ Euro bezahlen möchten, können Sie dies mit dem Kauf obiger Call-Option bewerkstelligen. Denn unabhängig vom Kursstand zum Zeitpunkt T kostet Sie die Aktie dann maximal 96 Euro indem Sie sie entweder direkt am Markt erwerben (im Fall $S_T \leq K$) oder den anfallenden Differenzbetrag (im Fall $S_T > K$) durch die Auszahlung der Option abdecken.

Die entscheidende Frage ist nun: Wieviel ist eine solche Option heute wert? Welchen Preis darf der Bankberater als Verkäufer dafür verlangen, bzw. welchen Preis sind Sie als Käufer bereit, dafür zu bezahlen?

2. ... und ein fairer Preis?

Wird die Option am Markt gehandelt (wie die Aktie auch), so wird der Preis der Option auch durch den Markt, d.h. durch die Nachfrage bestimmt. Reißt man dem Verkäufer die Optionsscheine aus den Händen, wird der Preis steigen; bleibt er auf ihnen sitzen, wird der Preis sinken. Das Erstaunliche ist nun, dass sich für diesen dann einstellenden "fairen" Preis der Option ein einfaches Prinzip finden und sogar eine Formel angeben läßt.

Zunächst scheint es einsichtig, dass der Preis der Option von den Vorstellungen abhängt, die man vom zukünftigen Kursverlauf hat. Unserer erste Aufgabe wird es also sein – und hier kommt die Stochastik ins Spiel – ein Modell aufzustellen, das den zufälligen Kursverlauf des Underlyings gut erfaßt.
Charakteristisch für die mathematische Herangehensweise ist nun, dass man zunächst ein ganz einfaches Aktienkursmodell betrachtet, auch wenn dieses die für einen Aktienchart typische "Zitterbewegung" nur sehr rudimentär erfasst.

3. Das Binomialmodell

Unsere sehr vereinfachenden Modellannahmen für den Kurs des Underlyings und das Marktgeschehen sind

(1) Ein Börsenhandel ist nur zu 3 Zeitpunkten
$t = 0$ (heute, April 2010)
$t = 1$ (August 2010)
$t = 2$ (Dezember 2010)
möglich; T (=April 2011) wird gleich 3 gesetzt

(2) In diesen drei Zeitpunkten können wir...

- die Aktie des Underlyings (auch Anteile davon) zum aktuellen Kurs kaufen oder verkaufen (auch sog. Leerverkäufe möglich)
- Geld auf ein zinsloses Bankkonto einzahlen bzw. von dort abheben (auch zinslose Überziehung erlaubt)

(3) Die Aktie steht in $t = 0$ bei 125 (Euro) und kann sich pro Zeitschrit nur

- mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{3}{4}$ um 20% nach **oben** oder
- mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - p = \frac{1}{4}$ um 20% nach **unten**

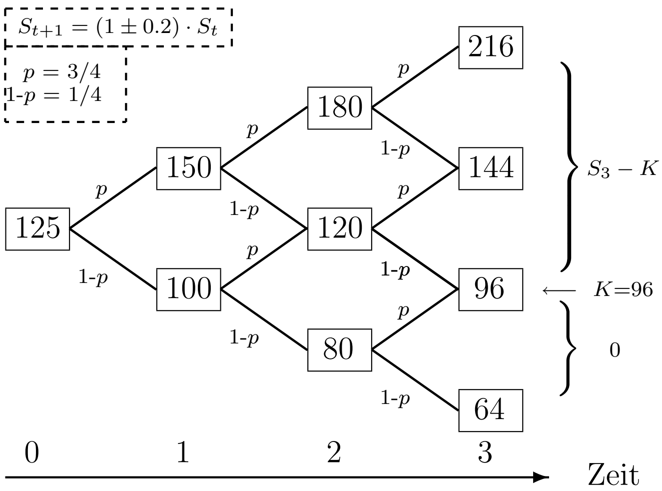
entwickeln.

Die Wahl von $p = \frac{3}{4}$ für eine Bewegung nach oben spiegelt dabei unsere positive Markterwartung wieder.

Dieses Binomialmodell läßt sich als Binomialbaum wie folgt aufzeichnen:

Man sieht, dass der Aktienkurs von 125 (in $t = 0$) bis zu 216 steigen oder auch auf 64 fallen kann. Insgesamt sind in $T = 3$ genau 4 Kursstaände möglich; ganz rechts ist zu diesen Endkursständen die jeweilige Auszahlung der Option notiert. Für

$S_3 = 216$ ist $C = 120$
$S_3 = 144$ ist $C = 48$
$S_3 = 96$ ist $C = 0$
$S_3 = 64$ ist $C = 0$.



Der zu diesem Baum gehörige Grundraum Ω besteht aus den 8 Pfaden, die (von oben nach unten) mit $\omega_1, ..., \omega_8$ bezeichnet seien. Für die zugehörige Wahrscheinlichkeit P auf Ω sind die Elementarwahrscheinlichkeiten dann die Pfadwahrscheinlichkeiten, also z.B. $P(\{\omega_1\}) = p^3$ u.s.w.

Es liegt nun nahe, in diesem Modell als Preis der Option die "mittlere Auszahlung", also den Erwartungswert von C zu verwenden. Dazu berechnen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S_3, die sich aus obigem Binomialbaum wie folgt ergibt:

$$P[S_3 = 216] = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} p^3 = \frac{27}{64}$$
$$P[S_3 = 144] = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} p^2(1-p) = \frac{27}{64}$$
$$P[S_3 = 96] = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} p(1-p)^2 = \frac{9}{64}$$
$$P[S_3 = 64] = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} (1-p)^3 = \frac{1}{64}$$

Der Erwartungswert von C unter P ist dann

$$E_P\left[(S_3 - K)^+\right] = 120 \cdot \frac{27}{64} + 48 \cdot \frac{27}{64} \ = \ 70.875.$$

Es wäre jedoch äußerst töricht, in diesem Modell für die Option 70.87 (Euro) zu bezahlen, denn man kann, wie wir im folgenden sehen werden, durch geschicktes Handeln mit einem weitaus geringeren Einsatz dieselbe Auszahlung erreichen wie sie die Option liefert. Der faire Preis der Option ist damit *nicht* der Erwartungswert der Auszahlung der Option, 70.87 Euro ist als Preis viel zu hoch.

4. Strategie und Vermögensprozeß

Bis jetzt haben wir zwar ein Modell für den Aktienkurs aufgestellt, jedoch noch nicht die Möglichkeit realisiert, mit der Aktie Handel zu betreiben. Dazu definieren wir für $t = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} x_t = &\ \text{Anzahl der Aktien, die zum Zeitpunkt } t \text{ gekauft werden;} \\ &\ \quad \text{diese werden bis } t+1 \text{ gehalten} \\ y_t = &\ \text{Betrag auf dem Bankkonto} \end{aligned}$$

Es bedeutet also z.B. $(x_0, y_0) = (1.2, -150)$, dass wir zum Zeitpunkt $t = 0$ die Menge von 1.2 Aktien kaufen und uns (dafür) 150 Euro von der Bank leihen, die wir natürlich in $t = 1$ wieder zurückzahlen müssen. (x_t, y_t) dürfen vom Pfad abhängen, d.h. wir können in $S_1 = 150$ anders handeln als in $S_1 = 100$, allerdings dürfen wir in t für die Festlegung von (x_t, y_t) immer nur auf die Information zurückgreifen, die wir zu diesem Zeitpunkt besitzen. Dies ist automatisch gegeben, wenn z.B. x_1 die Form hat $x_1 = a_1 \cdot 1_{\{S_1=150\}} + a_2 \cdot 1_{\{S_1=100\}}$ mit a_1, a_2 beliebige reelle Zahlen; für y_1 analog.

Zur durch $x = (x_0, x_1, x_2)$ und $y = (y_0, y_1, y_2)$ definierten Strategie ist ein

Vermögensprozess $\quad V_t,\ t = 0, 1, 2, 3,$

erklärt:

$t = 0$	$t = 1, ..., T-1$	$t = T$
Startvermögen (Startkosten)	Zwischenvermögen	Endvermögen
$V_0 = x_0 S_0 + y_0$	$V_t = x_{t-1} S_t + y_{t-1} = x_t S_t + y_t$	$V_T = x_{T-1} S_T + y_{T-1}$

Die Gleichung $x_{t-1} S_t + y_{t-1} = x_t S_t + y_t$ für $t = 1, ..., T-1$ beschreibt eine Bedingung an die Strategie, nämlich **selbstfinanzierend** zu sein. Dies bedeutet, dass sich das Vermögen ohne Zu- und Abflüsse entwickelt: alles, was wir in t besitzen, wird wieder investiert und wir schießen von außen kein Kapital zu.

5. Pricing durch Hedging: No Arbitrage

Die Idee zur Auffindung eines "fairen" Optionspreises π^C ist nun:

- suche eine selbstfinanzierende Strategie (x, y), die als Endvermögen V_3 genau die Auszahlung der Option hat (sog. **Hedge-Strategie für** C), also

$$V_3 = C = (S_3 - K)^+.$$

Aus dem Vermögensprozess dieser Strategie leiten wir dann den Optionspreis ab.

Die Bestimmung der Hedge-Strategie geschieht durch **Rückwärtsinduktion** mittels *Lösen von linearen* 2×2 *Gleichungssystemen.*
Dazu betrachten den Binomialbaum und stellen uns die Frage:

Welchen Wert (a, b) muss unsere Strategie (x, y) im Knoten $S = 180$ haben, damit wir in $t = 3$ genau das Vermögen $V_3 = 120$ (im Fall, dass der Kurs steigt) und $V_3 = 48$ (im Fall, dass der Kurs sinkt) erzielen?

Für $\omega = \omega_1, \omega_2$ (das sind die beiden Pfade, die über den Knoten $S_2 = 180$ laufen) ist also $a = x_2(\omega)$ und $b = y_2(\omega)$ und es muss gelten

$$\begin{aligned} a\, S_3(\omega_1) + b &= C(\omega_1) \qquad \text{d.h.} \qquad a\; 216 + b = 120 \\ a\, S_3(\omega_2) + b &= C(\omega_2) \qquad\qquad\quad\; a\; 144 + b = 48 \end{aligned}$$

Damit ist $a = 1$ und $b = -96$, d.h. wir müssen im Knoten $S_2 = 180$ genau 1 Aktie kaufen und uns 96 Euro von der Bank leihen. Da die Aktie in diesem Knoten 180 Euro kostet, benötigen wir dort ein Vermögen von

$$V_2(\omega) = 1 \cdot 180 - 96 \cdot 1 \;=\; 84 \;\; \text{(Euro)}$$

Analog verfährt man mit den 5 restlichen Knoten: Zunächst liefern die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a\,144 + b &= 48 \qquad \text{und} \qquad a\; 96 + b = 0 \\ a\,96 + b &= 0 \qquad\qquad\quad\;\; a\; 64 + b = 0 \end{aligned}$$

jeweils den Wert (a, b) der Strategie in den Knoten $S_2 = 120$ und $S_2 = 80$, nämlich $(a, b) = (1, -96)$ bzw. $(a, b) = (0, 0)$, und damit

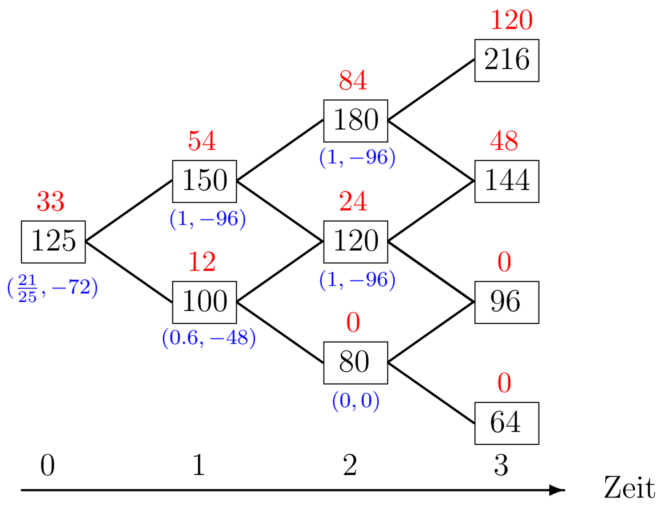
$$V_2(\omega) = 1 \cdot 120 - 96 \cdot 1 \;=\; 24 \qquad \text{und} \qquad V_2(\omega) = 0 \cdot 80 + 0 \cdot 1 \;=\; 0$$

das in diesen Knoten ($\omega = \omega_3, ..., \omega_6$ bzw. $\omega = \omega_7, \omega_8$) benötigte Vermögen. Von dort rechnet man durch den Ansatz

$$\begin{aligned} a\,180 + b &= 84 \qquad \text{und} \qquad a\; 120 + b = 24 \\ a\,120 + b &= 24 \qquad\qquad\quad\;\; a\; 80 + b = 0 \end{aligned}$$

auf x_1 und V_1 und schließlich auf x_0 und V_0 zurück. Trägt man diese Ergebnisse in den Binomialbaum ein, so ergibt sich

Die oben konstruierte Strategie ist durch Zahlenpaare *unter* den Knoten gegeben; die Zahlen *darüber* kennzeichnen den zugehörigen Vermögensprozess. Sie ist nach Konstruktion selbstfinanzierend und eine Hedge-Strategie für C, denn es gilt $V_3 = C$ (die Zahlen über den Kursständen S_3 entsprechen genau der jeweiligen Auszahlung der Option).



Man kann also bei einem Startkapital von 33 Euro mit obiger Strategie (in $t = 0$ müßte man dann sich noch 72 Euro von der Bank leihen um damit den $\frac{21}{25}$–Teil der Aktie kaufen zu können, u.s.w.) dieselbe Auszahlung erreichen wie die Option. Damit *muss* $V_0 = 33$ (Euro) der gesuchte faire Preis π^C der Option sein, also

$$\pi^C = V_0 = 33 \text{ Euro},$$

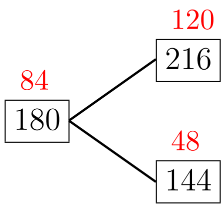
ansonsten gäbe es im Markt die Möglichkeit eines **risikofreien Gewinns**:

> Zahlen Sie für die Option *mehr als* 33 Euro, zu sichert ihr Bankberater die Option mit obiger Strategie (x, y) ab; dazu benötigt er ein Startkapital von nur 33 Euro, die Differenz, $0 < \pi^C - 33$ Euro, streicht er als risikofreien Gewinn ein.
>
> Zahlen Sie für die Option *weniger als* 33 Euro, so handeln Sie mit der Strategie $(-x, -y)$ und verschaffen sich so selbst einen risikofreien Gewinn von $0 < 33 - \pi^C$ Euro.

Eine Möglichkeit (Strategie), einen risikofreien Gewinn zu erzielen, nennt man **Arbitrage**. In einem effektiven Finanzmarkt darf es keine Arbitrage geben, der Markt ist **arbitragefrei**. ("you can't make money out of nothing", "there is no free lunch"). Das Prinzip "No Arbitrage" bestimmt dann den Preis der Option, der "faire" Preis ist also ein **arbitragefreier Preis** und beträgt in unserem Modell genau 33 Euro.

6. Pricing mit dem Martingalmaß

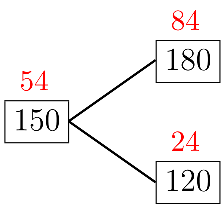
Im letzten Abschnitt wurde der arbitragefreie Preis der Option als Startkapital V_0 einer Hedge-Strategie *rekursiv* ermittelt. Es ist aber auch eine *direkte* Berechnung von V_0 (und auch V_t) möglich: Dazu betrachten wir zunächst im Binomialbaum aus Abschnitt 5 den Knoten $S_2 = 180$ und die von ihm ausgehenden Bewegungen der Aktie sowie des Vermögensprozesses



man erkennt folgenden Zusammenhang: Die beiden Gleichungen

$$q \cdot 216 + (1-q) \cdot 144 \;=\; 180 \qquad \text{und} \qquad q \cdot 120 + (1-q) \cdot 48 \;=\; 84$$

haben *dieselbe* Lösung, nämlich $q = \frac{1}{2}$.
Dasselbe stellen wir auch für alle anderen Knoten fest, z.B. bei



gilt

$$q \cdot 180 + (1-q) \cdot 120 \;=\; 150 \qquad \Longleftrightarrow \qquad q \cdot 84 + (1-q) \cdot 24 \;=\; 54,$$

ebenfalls für $q = \frac{1}{2}$.

Damit ist eine Wahrscheinlichkeit Q auf Ω definiert: $\quad Q(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \omega \in \Omega,$
für die insbesondere gilt

$$E_Q(S_3) \;=\; S_0 \qquad \text{und} \qquad E_Q(C) \;=\; V_0.$$

In der Tat ist

$$E_Q\left[(S_3-K)^+\right] = 120\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 48\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 \;=\; 33.$$

Damit ist der Optionspreis $\pi^C = V_0$ in der Tat der Erwartungswert der Auszahlung $C = (S_3 - K)^+$, allerdings bzgl. Q und *nicht* bzgl. der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit P.

Q heißt das zu P äquivalentes **Martingalmaß**, manchmal auch **risikoneutrales Maß**, weil sich unter Q der Aktienkurs als ein "faires Spiel" entwickelt: der Kursstand von heute ist der unter Q erwartete Kursstand von morgen.

7. Zusammenfassung

Wir fassen nun unsere Erkenntnisse über Optionspricing in einem effizienten Finanzmarkt zusammen. Die Resultate sind aus unserem Binomialmodell gewonnen, gelten aber auch in einem viel allgemeineren Rahmen, z.B. in dem in Abschnitt 8 angesprochenen Black-Scholes-Modell.

- Der "faire" Optionspreis basiert auf dem "No Arbitrage" Prinzip und hängt *nicht* von der Wahrscheinlichkeit P ab, die die Bewegung des Aktienkurses steuert.
- Die Arbitragefreiheit des Marktes ist äquivalent zur Existenz eines risikoneutralen Maßes Q (dies ist die Aussage des berühmten 1. Fundamentaltheorems der Finanzmathematik).
- Der arbitragefreie Preis der Option ist der Erwartungswert der Auszahlung *unter* Q, bzw. das benötigte Startvermögen einer Hedge-Strategie für die Auszahlung, falls man eine solche konstruieren kann.

8. Ausblick auf das Black-Scholes-Modell

Unser Binomialmodell mit nur 3 Handelszeitpunkten im Zeitintervall $[0, 1]$ (Zeithorizont = 1 Jahr) beschreibt die reale Aktienkursbewegung natürlich nur sehr unzureichend. Näher an die Realität kommt man, wenn man ein Binomialmodell mit n äquidistanten Handelszeitpunkten $\frac{k}{n}, k = 0, 1, ..., n-1$, im Zeitintervall $[0, 1]$ aufstellt, in welchem natürlich auch die Größen in (3) aus Abschnitt 3 an die Tatsache immer kleinerer Handelsspannen angepasst sind.

Für $n \longrightarrow \infty$ führt dies streng mathematisch zum berühmten, nach (den Nobelpreisträgern) Fischer Black und Myron Scholes benannten Black-Scholes-Modell, das den Aktienkurs $S_t, t \in [0, 1]$, durch eine **geometrische Brownsche Bewegung** modelliert

$$S_t = S_0\, e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}, \qquad t \in [0, 1].$$

$B_t, t \in [0, 1]$, bezeichnet dabei die (standard) **Brownsche Bewegung** und ist für die typische "Zitterbewegung" des Kurses verantwortlich. Die e-Funktion garantiert, dass der Kurs stets positiv ist und $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ sind Parameter, die individuell auf die Munich Re-Aktie angepasst werden können. μ heißt **Drift** und gibt an, ob sich der Kurs tendenziell nach oben ($\mu > 0$) oder nach unten

($\mu < 0$) bewegt. Der Parameter σ heißt **Volatilität** und beeinflußt die Stärke der "Zitterbewegung" des Kurses.

In diesem (arbitragefreien) Modell läßt sich eine geschlossene Formel für den arbitragefreien Preis einer Call-Option

$$C = (S_1 - K)^+$$

angeben, nämlich

$$\pi^C \;=\; S_0 \cdot \Phi\Big(\frac{\ln\big(\frac{S_0}{K}\big) + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\Big) - K \cdot \Phi\Big(\frac{\ln\big(\frac{S_0}{K}\big) - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\Big),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichnet und wir wieder angenommen haben, dass wir für Geldgeschäfte bei der Bank weder Zinsen bekommen noch welche entrichten müssen. Dies ist die berühmte **Black-Scholes Formel**, deren Herleitung außerhalb der Reichweite der Schulmathematik liegt, aber denselben Prinzipien und Überlegungen folgt wie wir sie im Binomialmodell vorgestellt haben. Man sieht, dass von den beiden Parametern μ und σ nur letzterer in die Preisformel eingeht; der arbitragefreie Preis ist unabhängig von μ, was im Binomialmodell der Tatsache entspricht, dass dort der Preis nicht von p abhängt.

9. Schlussbemerkung

Die finanzmathematische Modellierung hat sich in den letzten Jahren rasant entwickelt; statt des Black-Scholes-Modells betrachtet man etwa **stochastische Volatilitätsmodelle**, bei denen σ nicht nur von der Zeit, sondern auch vom Zufall abhängen darf. Eine weitere Verallgemeinerung sind sogenannte **Jump-Diffusion-Modelle**, die Kurssprünge in die Modellbildung mit einbeziehen.
Für die Schule bleibt das Binomialmodell, das von den Zuhörern, wie die Verfasser aus Vorträgen vor Schülern berichten können, auch gut verstanden wird, der beste Einstieg in die Finanzmathematik.

Literatur

Irle, A. (1998). *Finanzmathematik*, Teubner Studienbücher Mathematik.

Jarrow, R., Turnbull, S. (2000). *Derivative Securities*, 2. Auflage, South-Western College Publishing.

Ross, S.M. (1999). *An Introduction to Mathematical Finance* (Options and other topics), Cambridge University Press.