

EMERGENZ MATHEMATISCHER DIAGRAMMATIZITÄT-

Eine überraschende diagrammatische Deutung

Ergi ACAR, Goethe Universität

Meine Arbeit ist eingebunden in die Longitudinalstudie „erStMaL“, in der es um die Untersuchung der mathematischen Denkentwicklung im Vorschul- und frühen Grundschulalter geht.¹ Mein Forschungsinteresse greift die Ausführung zum diagrammatischen Denken auf, die sich in der mathematikdidaktischen Diskussion zur Semiotik stark an Peirce orientieren. Dabei interessiert mich besonders der Zusammenhang zwischen mathematischem Denken und inskriptionalen Darstellungen. Dörfler hebt in diesem Kontext den diagrammatischen Aspekt solcher Inskriptionen hervor. Diagramme sind Inskriptionen, die durch ein „(konventionelles) Regelsystem von Herstellung, Gebrauch und Transformation“ entstehen (Dörfler 2006, S.202). Schreiber und Krummheuer greifen diesen Ansatz auf und integrieren ihn in eine Interaktionstheorie mathematischen Lernens: Inskriptionen ebenso wie ihre regelbasierten Versionen als Diagramme werden als konstitutive Komponenten mathematischer Diskurse verstanden, die gleichsam komplementär als paralleler Kommunikationsstrang neben der vokalen Interaktion diese ergänzen stützen, vertiefen, präzisieren und ggf. auch konterkarieren. In der hier vorzustellenden Studie soll das Verhältnis von inskriptional und vokal geführter Interaktion rekonstruiert und unter einer entwicklungstheoretischen Perspektive analysiert werden. Fragen sind:

- Verändert sich das Verhältnis zwischen inskriptional und vokal geführter Interaktion im Laufe der Entwicklung?
- Geht im Hinblick auf die Entwicklung mathematischen Denkens die diagrammatische Interaktion der verbalen Interaktion voraus?

Dörfler verdeutlicht, dass die Verwendung von Diagrammen in mathematischen Arbeitsprozessen ein Stück weit einen externalen Aspekt des Denkprozesses darstellt. „Externalismus sieht mathematisches Tun primär und untrennbar als die Manipulation, Transformation, Konstruktion, Interpretation von Inskriptionen, die für den Internalismus eben nur Darstellung und Repräsentation sind.“ (Dörfler 2006).

Krummheuer hebt ebenfalls die Wichtigkeit von Inskriptionen in der mathematischen Kommunikation hervor: „Mathematische Kommunikation ist ohne das Hinzuziehen eines schriftlich-grafischen Elements (Inskription) kaum vorstellbar“ (Krummheuer 2009). Schreiber (2006) konnte diesen Zusammenhang in seiner Arbeit zum Mathe-Chat auf der computerbezogenen Chatebene nachweisen.

Insofern gehe ich hier über Dörflers Ansatz hinaus: Inskriptionen und Diagramme sind in einen Interaktionsprozessen eingebunden. Die Kinder interagieren miteinander und manipulieren zugleich an ihren Inskriptionen. Obwohl es bei Hoffman (2007) um die Mathematik und bei uns um Kinder und deren mathematischen Denkprozesse geht, sehen wir eine gemeinsamen Ansatzpunkt: Er sieht ein wesentliches Moment der Entwicklung von Mathematik in der Konzeption und Weiterentwicklung von Darstellungssystemen. Bezieht man diese Annahme auf mathematische Denkentwicklungen von Kindern im Vorschulalter, dann liegt die

¹ Vgl: [http://www.idea-frankfurt.eu/Aufgerufen am 12.01.2009](http://www.idea-frankfurt.eu/Aufgerufen%20am%2012.01.2009)

Vermutung nahe, dass die diagrammatischen Momente in den zugehörigen Interaktionsprozessen den verbalen vorausgehen. In Bezug auf die mich interessierenden vorschulischen Prozesse, untersuche ich unter anderem die Hypothese, ob bzw. in welcher Weise sich die Weiterentwicklung auf der diagrammatischen Ebene auf die mathematische Denkentwicklung auswirkt. Mit Kadunz und Krummheuer sehe ich diese diagrammatischen Entwicklungen auch im Zusammenhang mit Begründungen und Argumentationen.

Episode – Was gehört nicht dazu?

Die Aufgabe der Episode geht auf das Aufgabenformat „Which one doesn't belong?“ aus Wheatlys Arbeiten zu „Collections“ zurück. Für die Marienkäfer-Aufgabe wurde das Aufgabenformat wie folgt modifiziert: Die Marienkäfer sind gelb, grün oder rot, und haben entweder Dreiecke, Kreise oder Quadrate in unterschiedlicher Anzahl und Größe auf dem Rücken. Den 4 ½ jährigen monolingualen Tandemkindern Marie und René werde jeweils drei verschiedene, große Marienkäferkarten vorgelegt. Die Kinder sollen bestimmen, welche Marienkäfer zusammengehören oder welcher nicht in die Gruppe passt. In der Spielsituation sitzen die Kinder in einem ruhigen Raum auf Stühlen an einem Tisch auf dem ein runder Teppich liegt. Die Begleitperson des erStMaL – Teams bietet den Kindern zunächst drei gleich große Stapel mit kleinen Karten an.



Szene 1

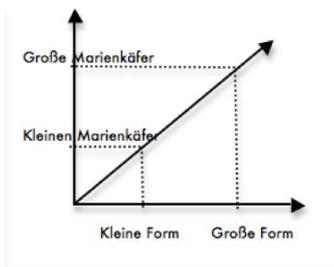
Die Begleitperson legt nacheinander ein Tripel von gelben Marienkäferkarten in die Mitte des Tisches. Auf den ersten Blick reagiert Marie mit da die sind groß\ schaut



weiter und sagt dann auf die zweite Karte weisend nur die großen\ $\langle 665-669 \rangle$. René kommentiert dies mit Mama und Papa\ ,zeigt mit dem Finger auf die großen Marienkäfer und fährt dann fort mit weiß ich\ die kleinen Kinder $\langle 670-672 \rangle$. Im Anschluss kommentiert Marie das sind die ganz kleinen und nimmt einen kleinen roten Marienkäfer vom Tischrand in die Hand das weiß ich das sind

die Babys und das sind die großen $\langle 673-676 \rangle$. Die Begleitperson legt weitere drei Marienkäferkarten auf den Tisch. Marie legt spontan das kleine rote Marienkäferkärtchen zurück in den Kreis und nimmt ein kleines gelbes Kärtchen vom Tischrand. Und das muss ma und das hier ist das Kind\ $\langle 681-682 \rangle$ sagt sie, während sie das Kärtchen zwischen die beiden nebeneinander liegenden großen gelben Marienkäfer legt. Marie begründet dieses Position mit weil des weil des genauso aussieht wie das aber das und zeigt mit ihrem Finger auf den unteren Marienkäfer ist nicht richtig weil es Punkte hat und die zeigt auf den rechten oberen Marienkäfer ham Dreiecke\ $\langle 687-691 \rangle$. René's Reaktion beschränkt sich auf das Zuhören. Zum Schluss nimmt die Begleitperson die großen gelben Marienkäferkarten mit den Punkten weg und lässt somit eine „Familie“ auf dem Tisch liegen. Nach dieser Aktion nimmt René eine gelbe, kleine Marienkäferkarte mit drei Dreiecken und sagt des ist der Bruder\ $\langle 706 \rangle$.

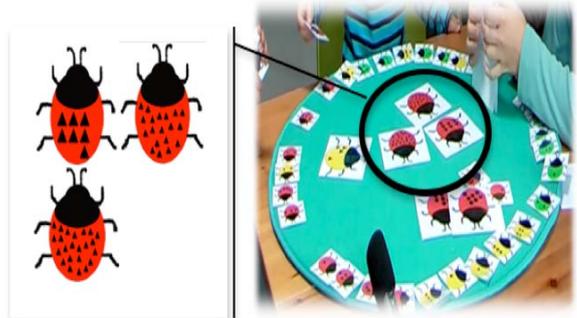
Marie und René haben eine als geteilt geltende Deutung der Situation ausgehandelt. Die kleinen Marienkäfer sind die Kinder und die großen sind die Erwachsenen. Dieser Deutung können wir ein Regelsystem der folgenden Art unterstellen:



- Eine Marienkäferfamilie hat gleiche Formen auf dem Rücken.
- Eine Marienkäferfamilie hat die gleiche Farbe.
- Eltern sind größer als Kinder.
- Die Formen auf dem Rücken der Eltern-Marienkäfer sind größer als die der Kinder-Marienkäfer.

Szene 2

Die Begleitperson stellt die Frage: da passt auch einer nicht so richtig\, könnt ihr den erkennen von den drei Großen/ René reagiert und zeigt sofort auf ein Marienkäferkärtchen mit vielen kleinen Dreiecken, während Marie sich offenbar noch die neue Aufgabenkonstellation anschaut, bevor sie sich für eine andere Karte als René entscheidet: Marie zeigt auf den linken Käfer mit der Begründung: Das ist der, weil er große Zacken hat <771> Das Wort „Zacken“ verwendet sie wahr-scheinlich Synonym für Dreieck. Sie möchte somit sagen, dass der Marienkäfer mit den großen Dreiecken nicht dazu gehört.



Im Anschluss stellt die Begleitperson den Kindern Fragen zu ihrer getroffenen Wahl. Er zeigt abwechselnd die zwei großen Marienkäfer mit kleinen Dreiecken und sagt: die zwei . gehören nicht zu\ <784> weil die . gleichzeitig\ <785> . Jedoch scheint die Begleitperson weiterhin Verstehensprobleme zu haben. René zeigt auf die Marienkäfer mit großen Dreiecken und ergänzt: und die wachs. und die sind schon groß- <791>. Er wendet in diesem Fall keine kanonische Zweikartenlösung an, sondern zeigt vielmehr auf die zwei Karte, die nicht dazu gehören. Rene verwendet zwei Klassifikationssysteme und stellt gleichsam eine funktionale Beziehung auf: Große Marienkäfer definiert er als „Mama/Papa“ bzw. „Erwachsene“, kleine Marienkäfer als „Kind“ oder „Baby“. So wie bereits in der Szene 1: Die Größe der Formen weist auf dem Status in der Familie hin (als eine logische Verknüpfung). René und Marie wenden verschiedene Auswahlverfahren an. René wählt eine neue Form der „Zweikartenlösung“ und Marie verwendet die „Einkartenlösung“. Durch die spezifische- diagrammatische Sichtweise ändert sich die von Wheatley beschriebene „Zweikartenlösung“. Sie ist nicht mehr in-direkt sondern direkt, indem René auf beiden Karten zeigt, die auszuschließen sind.



Die Kinder fahren fort, indem sie große und kleine Marienkäfer paarweise gruppieren. Interessanterweise haben Sie auch die großen roten Marienkäfer mit kleinen Dreiecken zusammengelegt, zu denen es in dieser Szene keine passenden

Kinder-Marienkäfer gibt. In dieser Situation sehen wir nochmals die familiäre Metaphorisierung. Die Kinder haben sich ein familiales Bezugssystem geschaffen. Dies verstärkt unsere Vermutungen, dass hier eine spezifische Diagrammatizität von den Kindern hervorgebracht wurde, die wohl nicht nur für die Begleitperson überraschend ist.

In der Episode herrscht eine enge Verzahnung von Inskription mit der vokal geführten Interaktion vor (Krummheuer 2009). Die Inskription ist hier als eine Collection-Aufgabe vorgegeben und es ist lediglich die Aufgabe der Kinder, in diesen Inskriptionen eine diagrammatische Struktur zu konstruieren bzw. zu finden. Unser Inskriptionsbegriff selbst ist weiter gefasst und wir werden uns auch mit Fällen beschäftigen, in denen die Kinder Inskriptionen selbst entwickeln.

Die diagrammatischen Deutungen drücken sich in vorliegenden Fall als Zuordnung von Karten zu Eltern und Kindern aus. Es handelt sich hierbei nicht um eine Weiterentwicklung der Inskription selbst, sondern um die spezifische Einordnung der vorgegebenen Inskription. Jedoch kann man in den jeweiligen Zusammenstellungen von drei Marienkäferkarten diagrammatische Weiterentwicklungen sehen.

Wie anfänglich ausgeführt, erkennt man, dass hier die Diagramme in die interaktive Aushandlung eingebunden sind und nicht so sehr - wie bei Dörfler- einen, extralinguistischen² Status besitzen. Sie sind eingebunden in Deutungssysteme, die sowohl inskriptionale als auch verbale (vokale) Elemente enthalten. In weiteren Analysen, insbesondere unter longitudinaler Perspektive, werde ich die Funktion der diagrammatischen Deutungen und ihrer interaktionalen Weiterentwicklungen untersuchen. Da sich in der Entwicklung des mathematischen Denkens auch die mathematischen Darstellungssysteme verändern, ist die Konzeption solcher Darstellungssysteme weiter zu erforschen.

Literatur

- Dörfler, W. (2006) Diagramme und Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik 27(3/4): 200-219
- Hoffmann, Michael H.G. (2007) Learning from people, things, and signs. Stud Philos Educ 26: 185–204
- Kadunz, G. (2006) Schrift und Diagramm. In: Journal für Mathematik-Didaktik 27(3/4): 220-239
- Krummheuer, G. (2009) Inscription, narration and diagrammatically based argumentation. The narrative accounting practices in the primary school mathematics lesson. In W.-M. Roth (Ed.), *Mathematical representation at the interface of the body and culture* (pp. 219 - 243). Charlotte, NC: Information Age Publishing
- Krummheuer, G., Brandt, B. (2001) *Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Weinheim: Beltz.
- Schreiber, C. (2006) Rekonstruktion inskriptionsbasierter Problemlöseprozesse aus semiotischer Perspektive. In: Jungwirth, H. & Krummheuer, G. (Hrsg.): *Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht*, Band 1. Münster u.a.: Waxmann: 153-187.
- Wheatly, G. (2008) Which one doesn't belong? Collections. Bethany Beach, DE, Mathematics Learning.

² Siehe Seite 2