

Daniela ABMUS, Braunschweig

Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bei mathematisch begabten Grundschulkindern

Die Erforschung spezifischer Charakteristika mathematischer Begabungen im Grundschulalter hat in letzter Zeit zunehmend an Bedeutung gewonnen. Als ein Begabungsmerkmal werden häufig besondere Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen genannt, die hier als Fähigkeiten zu flexiblen Denkprozessen verstanden werden sollen, bei denen während der Bearbeitung einer Aufgabe ein- oder mehrmalig ein Wechsel der Betrachtungsweise, der Bearbeitungsrichtung und/oder der verwendeten Relationen erfolgt. Zur einführenden theoretischen Analyse des Umkehrens von Gedankengängen werden hier zunächst drei verschiedene Aufgabenkategorien beschrieben, bei deren Bearbeitung unterschiedliche Umkehrprozesse zum Tragen kommen können:

1. Aufgaben mit unbekanntem Anfangszustand

Zu dieser Kategorie sind Aufgaben zu zählen, in denen ausgehend von einem unbekanntem Anfangszustand verschiedene Transformationen und der Endzustand beschrieben werden und der Anfangszustand zu ermitteln ist.

Beispiel: Aufgabe 1

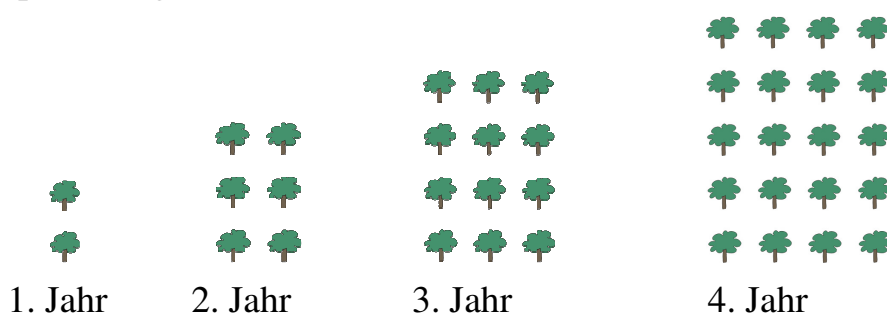
Jenny bekommt von ihrer Oma eine Tüte voller Smarties geschenkt. Am ersten Tag isst sie **die Hälfte** der Smarties und **dann noch einen**, am zweiten Tag isst sie von den übrigen Smarties wieder **die Hälfte** und **dann noch einen**, danach sind noch 6 Smarties übrig. Wie viele Smarties waren am Anfang in der Tüte?

Aufgaben dieser Art können in jedem Fall durch Ausprobieren gelöst werden, wobei für den fehlenden Anfangswert ein mehr oder weniger willkürlich gewählter Wert angenommen wird, auf den die verschiedenen Transformationen angewandt werden. Durch Vergleich des erhaltenen Ergebnisses mit dem in der Aufgabe angegebenen Endwert kann so eine Abschätzung über die Veränderungsrichtung des Anfangswertes vorgenommen werden. Je nach Systematisierungsgrad des Probierens ist eine mehr oder weniger schnelle Annäherung an den gesuchten Wert möglich. Umkehren von Gedankengängen kommt bei dieser Vorgehensweise jedoch nicht zum Tragen. Demgegenüber stellt die heuristische Strategie des Rückwärtsarbeitens einen Bearbeitungsansatz dar, der bei Aufgaben dieses Typs bei korrekter Anwendung unmittelbar zum richtigen Ergebnis führt, sofern alle Transformationen problemlos umkehrbar sind. Korrektes Rückwärtsarbei-

ten erfordert hier ein Umkehren von Gedankengängen, da die Bearbeitungsrichtung nicht mehr der Aufgabenstellung entspricht. Das Umkehren bezieht sich dabei auf zwei unterschiedliche Aspekte, nämlich einerseits auf die Umkehrung der einzelnen Transformationen und andererseits auf die Transformationsreihenfolge, die nun in umgekehrter Richtung durchlaufen werden muss.

2. Aufgaben mit umgekehrter Fragestellung

Beispiel: Aufgabe 2



- Hier wächst ein Zauberwald, der immer die Form eines Rechtecks hat. Jedes Jahr verändert sich der Wald nach einer bestimmten Regel. Wie viele Bäume enthält der Wald im 5. Jahr?
- Wie viele Bäume enthält der Wald im 9. Jahr?
- In einem Jahr werden 110 Bäume gezählt. Im wievielten Jahr ist das?

Zu dieser Kategorie sind mehrteilige Aufgaben wie Aufgabe 2 zu zählen, bei denen in mindestens einer Teilaufgabe eine umgekehrte Fragestellung zu bearbeiten ist, in der gegenüber den vorherigen Teilaufgaben Gegebenes und Gesuchtes vertauscht wird, die grundlegende Struktur der Aufgabe jedoch erhalten bleibt. Bei der Bearbeitung der umgekehrten Fragestellung werden Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen zum einen dafür benötigt, um trotz Umkehrung der Fragestellung die Konstanz der Strukturen erkennen und diese weiter nutzen zu können. So können Aufgaben dieses Typs häufig gelöst werden, indem die Vorgehensweisen der vorangegangenen Teilaufgaben (ausprobierend) fortgeführt werden. Voraussetzung ist hierbei, dass schon bei den ersten Fragestellungen sinnvolle Strukturen erkannt und genutzt wurden. Der Bearbeitungserfolg der umgekehrten Fragestellung ist somit meist von einer korrekten Lösung der vorangegangenen Aufgaben abhängig. Ist das Umkehren der in der Aufgabenstellung verwendeten Relationen eindeutig möglich, kann das Umkehren von Gedankengängen zum anderen im Umkehren von Operationen bzw. Relationen zur Anwendung kommen.

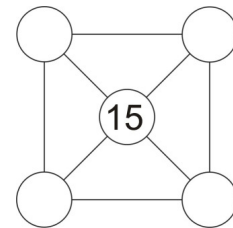
3. Aufgaben, die ein flexibles Umkehren von Relationen erfordern

Zu dieser Kategorie gehören Aufgaben, die nicht durch ausschließliches Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten zu lösen sind, sondern deren Bearbeitungen einen flexiblen Umgang mit sich oft mehrmals umkehrenden Relationen erfordert, sofern nicht nur ausprobiert wird.

Beispiel: Aufgabe 3

Tim denkt sich eine Figur aus, in die er immer nach diesen drei Regeln Zahlen in die Kreise schreibt:

1. Regel: Bei zwei untereinander stehenden Zahlen ist die untere Zahl immer um 1 größer als die obere Zahl.
2. Regel: Bei zwei nebeneinander stehenden Zahlen ist die rechte Zahl immer um 4 größer als die linke Zahl.
3. Regel: Bei den Diagonalen ergeben die beiden Zahlen in den Ecken zusammengezählt immer die Zahl im mittleren Kreis.“



Im mittleren Kreis steht die Zahl 15. Welche Zahlen müssen in den anderen Kreisen stehen, damit alle Regeln stimmen?

4. Untersuchungsergebnisse

Untersuchungen mit potentiell mathematisch begabten Zweitklässlern ergaben, dass zwar viele dieser Kinder noch Probleme haben, Gedankengänge umzukehren, es ihnen im Schnitt jedoch wesentlich besser gelingt als „normal“ begabten Kindern gleichen Alters. So konnte kein Kind der normalen Grundschulklassen, die als Vergleichsgruppen (N= 69) eingesetzt wurden, Aufgabe 1 lösen, während dies immerhin 9% der potentiell begabten Zweitklässler (N=182) gelang und darüber hinaus bei 35% der Kinder sinnvolle Lösungsansätze zu erkennen waren. Die Mehrheit der potentiell begabten Zweitklässler fand die Lösung durch Rückwärtsarbeiten und auch bei vielen anderen Kindern mit nicht ganz korrekten Ergebnissen waren Lösungsversuche ausgehend vom Endwert zu beobachten. Es zeigte sich, dass den meisten Kinder das Bilden der Umkehroperationen weitgehend korrekt gelang, während es ihnen häufig Schwierigkeiten bereitete, die Operationsreihenfolge umzukehren bzw. alle Operationen bei der Umkehrung zu berücksichtigen.

Auch die umgekehrte Fragestellung in Aufgabe 2 bereitete vielen potentiell begabten Zweitklässlern Schwierigkeiten, es gelang jedoch zwei Drittel der 77 Kinder, die in a) und b) korrekte Strukturen nutzten, diese auch in der Bearbeitung von c) anzuwenden. Besonders erfolgreich waren dabei Kinder, die b) multiplikativ lösten. Auch andere Kinder, die in b) eine falsche

Struktur verwendet hatten, versuchten den eingeschlagenen Lösungsweg fortzusetzen oder gar mit umgekehrten Relationen zu arbeiten und ließen damit erkennen, dass sie die Umkehrung der Fragestellung prinzipiell verstanden hatten. Der Einsatz anderer Aufgaben dieser Aufgabenkategorie bestätigte ebenfalls, dass ein Großteil der potentiell mathematisch begabten Kinder, die in vorangegangenen Aufgabenteilen korrekte Strukturen nutzen konnten, auch bei der Bearbeitung der umgekehrten Fragestellung sinnvolle Lösungsansätze zeigten (Aßmus, 2010). Eine hohe Lösungsquote war besonders bei den Kindern zu verzeichnen, die vorher den Rechenweg stark verkürzende Strukturen verwendet hatten.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Untersuchungen sowie Beobachtungen in anschließenden Fördermaßnahmen die Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen als Begabungsmerkmal prinzipiell bestätigt haben, wobei diese Fähigkeiten bei Grundschulkindern jedoch noch recht unterschiedlich ausgeprägt sind. Als Erklärungsansätze für den unterschiedlichen Ausprägungsgrad der Fähigkeiten kommen m.E. folgende Hypothesen in Frage: Einerseits könnte die Präferenz für das Rückwärtsarbeiten als Lösungsstrategie bei Aufgaben mit unbekanntem Anfangszustand vom jeweiligen Problemlösetyp abhängen, andererseits könnte eine besondere Ausprägung der Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen ein Indikator für die „Qualität“ der Begabung sein. Für letzteres würde sprechen, dass besondere Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen in der Fördersituation kontinuierlich von den leistungsstärksten Kindern gezeigt wurden.

Auffällig war in den Untersuchungen der bei arithmetischen Aufgaben wiederholt aufgetretene Zusammenhang zwischen der Nutzung mathematischer Strukturen zur starken Verkürzung des Rechenweges und dem Lösungserfolg bei nachfolgenden Teilaufgaben mit umgekehrten Fragestellungen. Der erfolgreichen Bearbeitung der umgekehrten Fragestellung ging häufig die Verwendung eines besonders kurzen Rechenweges voraus. Inwiefern Zusammenhänge zwischen den Fähigkeiten im Strukturieren in Form von Superzeichenbildung und den Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bestehen, wäre in anderen Untersuchungen abzuklären.

Literatur

Aßmus, D. (2010): Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bei potentiell mathematisch begabten Grundschulkindern. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hrsg.): *Kompetenzen mathematisch begabter Grundschul Kinder erkunden und fördern* (S. 45 – 61). Offenburg: Mildenerger