Ludwig Bauer, Passau

Fallstudien über Schülervorstellungen zu 0,9 Periode

1. Einführung

256 Schülern der Jahrgangsstufen 7 bis 12 aus 11 Klassen von 3 verschiedenen bayerischen Gymnasien wurde während des Unterrichts ein Fragebogen zur schriftlichen Beantwortung vorgelegt. Eine der Fragen hatte folgenden Wortlaut:

Statt 0,99999… (immer so weiter) schreibt man auch $0,\overline{9}$. *Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Kreuze an:*

a) $0,\overline{9} <$ ☐ *b)* $0,\overline{9} = 1$ ☐ *c)* $0,\overline{9} > 1$ ☐ *Begründung: ……*
Schülerantworten zu dieser "Frage mit Tiefgang" (Danckwerts/Vogel 2006, S. 27-32) werden analysiert und diskutiert.

2. Mathematikdidaktische Analyse

Mögliche Zugangsweisen bzw. Aktivitäten zu $0,\overline{9}$

- Rechnerische Verfahren der Bestimmung von $0,\overline{9} = 1$ mit Hilfe von Brüchen bzw. mit Hilfe von geeigneten Gleichungen, z.B. $0,\overline{9} = 0,999\ldots = 9 \cdot 0,111\ldots = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$
- Rundungsüberlegungen zu $0,\overline{9}$
- Anschaulich-zeichnerische Darstellung von 0,9; 0,99 usw. auf Ausschnitten der Zahlengeraden
- Funktionale Deutungen von $f(x) = 1-(0,1)^x$ im Koordinatensystem
- Abstandsbestimmungen: Vergleich von 1-0,999…9(k) und $0,\overline{9}$ - 0,999…9(k), wobei 0,999…9(k) den Dezimalbruch mit k Ziffern 9 nach dem Komma bezeichnen soll.
- Zweipersonenspiel der Art: Person P_1 gibt einen (kleinen) Abstand der Größe ε vor, Person P_2 soll dann einen Index k bestimmen, sodass (1-0,999…9(k)$<\varepsilon$ gilt (mehrfache Durchgänge; Beobachtung der Gewinnsituation)
- in der Fortsetzung dazu Widerspruchsbeweis: Die Annahme $1-0,\overline{9}=\varepsilon$ wird zu einem Widerspruch geführt
- $0,\overline{9}$ als Summe einer unendlichen geometrischen Reihe: $S = \frac{0,9}{1-0,1} = 1$

Zur Ontologie von $0,\overline{9}$

$0,\overline{9}$ kann aufgefasst werden als Bezeichnung für …

den unendlichen Dezimalbruch 0,99999… (unendlich viele Stellen nach dem Komma mit Ziffer 9); die unendliche Folge der endlichen Dezimalbrüche 0,9 0,99 0,999 0,9999 usw.; den Grenzwert dieser Dezimalbruchfolge; die Folge der Partialsummen 0,9; (0,9+0,09); (0,9+0,09+0,009); … usw.; den Grenzwert dieser Partialsummenfolge; die unendliche geometrische Reihe 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + …; die Summe dieser unendlichen Reihe. Je nachdem wird entweder der unendliche Prozess der Entstehung von $0,\overline{9}$ ("potentiell unendlich") oder das Ergebnis, also der Grenzwert des Prozesses ("aktual unendlich") betont. Das Objekt $0,\overline{9}$ ist ontologisch offen bzw. mehrdeutig.

3. Schülervorstellungen zu $0,\overline{9}$: Quantitative Analyse

Klasse	Zahl der Schüler Gesamt	$0,\overline{9}<1$		$0,\overline{9}=1$		…
7a	27	22	81,5%	4	14,8%	
7b	31	19	61,3%	10	32,3%	
8a	23	19	82,6%	2	8,7%	
8b	24	15	62,5%	8	33,3%	
8c	24	15	62,5%	7	29,2%	
9a	19	13	68,4%	5	26,3%	
9b	19	6	31,6%	14	73,7%	
9c	19	15	78,9%	9	47,4%	
10a	23	12	52,2%	14	60,9%	
10b	26	20	76,9%	6	23,1%	
12GK	23	21	91,3%	2	8,7%	
Gesamt	256	177	69,1%	81	31,6%	

Grobe Gesamtergebnisse: $0,\overline{9}<1$ ca. 70%, $0,\overline{9}=1$ ca. 30%; keine lineare Entwicklungstendenz in der Abfolge der Jahrgangsstufen.

"Ausreißerklassen" 9b, 10a: In diesen Klassen erzeugten einzelne Schüler eine lebhafte Gruppendiskussion, in deren Verlauf die Forderung nach einer anonymen Einzelarbeit außer Kraft gesetzt wurde. In der Grundkursklasse 12GK war die Zustimmung zu $0,\overline{9}<1$ mit ca. 91% am höchsten. Die Infinitesimalmathematik der Oberstufe mit einer ausführlichen Behandlung von Grenzwerten führte offensichtlich (zunächst?) zu einer Verstärkung der Position $0,\overline{9}<1$!

4. Schülervorstellungen zu $0,\overline{9}$: Qualitative Analyse

4.1. Argumente für $0,\overline{9} < 1$

- $0,\overline{9}$ und 1 als feste, unterscheidbare Objekte; vom kleineren $0,\overline{9}$ fehlt etwas zum größeren Objekt 1 (*es fehlt immer noch ein Stückchen*).
- $0,\overline{9}$ nähert sich 1, erreicht es aber nicht (Prozess) (*$0,\overline{9}$ geht gegen 1*).
- Dezimalbrüche der Art 0,… sind grundsätzlich kleiner als 1 (*Null Komma etwas ist immer kleiner*).
- $0,\overline{9}$ wird erst durch Runden zu 1.
- 1 ist ein Ganzes, $0,\overline{9}$ ein Teil des Ganzen.
- $0,\overline{9}$ ist zwar mathematisch 1, aber es fehlt noch etwas zu 1.
- $0,\overline{9} < 1$ ist einfach so.
- $0,\overline{9} < 1$. Fragen Sie 11880, da werden sie geholfen.

4.2. Argumente für $0,\overline{9} = 1$

- Es ist so.
- Weil man es so sagt.
- Das haben wir mal gelernt.
- $0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$ (Umrechnen).
- gleich groß, wenn man rundet.
- $0,\overline{9}$ nähert sich 1, also kann man sagen $0,\overline{9} = 1$.
- Der Unterschied zwischen beiden ist so klein, dass man sagen kann $0,\overline{9} = 1$.

Die letzten drei Aussagetypen stammen zwar aus dem Pool zu $0,\overline{9}=1$, stützen inhaltlich aber eher die Position $0,\overline{9}<1$.

4.3. Kognitive Auffassung

Die kognitive Auffassung der Schüler zu $0,\overline{9}$ ist geprägt durch folgende Kennzeichen: Mathematische Variabilität; Kognitive Unschärfe ("novizenhafte mentale Repräsentation"); Heterogenität, individuelle Verschiedenheit; Implizitheit, Privatheit; Anschauung, Intuition, Alltagsdenken (dominant); Konstruktiver Charakter des Wissens; Formalismen/rechnerische Verfahren (ohne inhaltliche Überlegungen). Offensichtlich wird das Thema

$0,\overline{9}$ im Unterricht nach einer kurzen frühen Behandlung im Rahmen der Bruchrechnung später nicht mehr aufgegriffen.

5. Diskussion

Die Beschäftigung mit Mathematik auf einer formal höheren Stufe führt nicht zwingend zum Verständnis der Mathematik von niederen Stufen! Ein mathematischer Formalismus (rechnerischer Umgang mit Grenzwerten, Epsilontik) garantiert nicht automatisch ein ursprüngliches, elementares Verstehen! Man kann die Aussagen der Schüler idealtypisch formulierten Denkstilen zuordnen (Przenioslo 2006), z.B. den Typen "pragmatisch arbeitender Empiriker", "verfahrensorientierter Schematiker", "holistisch denkender Intuitionist", "analytisch argumentierender Theoretiker". Der Mathematikunterricht sollte Anknüpfungspunkte für alle diese Typen schaffen und zulassen. Wichtig ist ein genetisches Arbeiten in kleinen und damit überschaubaren Lernumgebungen (z.B. im Prozess der Entstehung eines exakten Grenzwertbegriffs durch Präzisierung/Formalisierung anschaulich-intuitiver Alltagsvorstellungen zu $0,\overline{9}$). Am Exempel $0,\overline{9}$ können grundlegende, typische Vorstellungen, Ideen, Begriffe der Analysis erfahrbar und sichtbar gemacht werden (auch ohne systematische Behandlung von Folgen und Reihen). $0,\overline{9}$ sollte an mehreren Stellen / bei verschiedenen passenden Gelegenheiten im Curriculum thematisiert werden, insbesondere wieder mit infinitesimalen Mitteln (Oberstufe Gymnasium, Universitätsstudium). Dabei sollten anschaulich-intuitive Vorstellungen der Schüler problematisiert und mit Angeboten für eine mathematische Weiterentwicklung und Exaktifizierung angereichert werden (siehe 2).

6. Literatur

Dankwerts, R., Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum

Eisenmann, P. (2005): Warum gilt nicht $0,\overline{9} < 1$? In: Praxis der Mathematik, H. 4, S. 40-42

Prediger, S. (2001): Mathematiklernen als interkulturelles Lernen. Entwurf für einen didaktischen Ansatz. In: Journal für Mathematikdidaktik 22, H. 2, S 123-144

Przenioslo M. (2006): Cognitive structures connected with the calculus notions held by representatives of various intellect types. In: Journal für Mathematikdidaktik H. 2, S. 113-139