Stephan BERENDONK, Köln

Wie kann Topologie in der Schule sinnvoll unterrichtet werden?

Mathematisch interessierte Oberstufenschüler können in den Niederlanden seit 2007 zusätzlich zu 'Wiskunde B' (Mathematik B) das Fach 'Wiskunde D' wählen. Eines der Ziele von Wiskunde D ist es, Schülern einen Einblick in die Entwicklung der modernen Mathematik zu vermitteln. An verschiedenen niederländischen Universitäten laufen daher momentan Projekte in denen Unterrichtseinheiten für Wiskunde D entwickelt werden.

Die aufsehenerregende Lösung der Poincaré-Vermutung gab den Anlass, neben Themen der angewandten Mathematik auch die Topologie als mögliches Thema von Wiskunde D aufzunehmen. Hieraus entstand das Interesse an der im Titel gestellten Frage. 'De Praktijk', ein Projektbüro für naturwissenschaftlichen Unterricht, wurde schließlich mit der Entwicklung einer 20 Schulstunden umfassenden Unterrichtseinheit zur Topologie beauftragt, die inzwischen fertiggestellt ist und den Namen 'TopWis Poincaré' trägt (http://www.diswis.nl/nl/homepage/wat-is-diswis/diswis-poincare).

Ein zentraler Lehrinhalt von TopWis Poincaré ist die Klassifikation der geschlossenen Flächen, die besagt, dass jede geschlossene Fläche entweder zu einer Kugel mit Henkeln oder zu einer Kugel mit Kreuzhauben homöomorph ist. Hierzu werden zunächst Torus und projektive Ebene als Beispiele für Flächen eingeführt. Danach werden nach dem Baukastenprinzip, d.h. durch Bildung der zusammenhängenden Summe, kompliziertere Flächen erzeugt. Dies geschieht auf spielerische Weise. Dann wird festgelegt, dass zwei Flächen als gleich, man sagt homöomorph, angesehen werden, wenn sie durch eine Reihe von stetigen Verformungen und bestimmten Schneide- und Klebeoperationen ineinander überführt werden können. Die Arbeit der Schüler ist konstruktiv, die Handlungsorientierungen werden jedoch durch schrittweise Instruktion und Anleitung gegeben.

Die geschlossenen nicht-orientierbaren Flächen besitzen kein Referenzobjekt in der Realität der Schüler. Ebenso besitzt die Durchführung einer Homöomorphie oder das Bilden einer zusammenhängenden Summe keine Referenzhandlung in ihrer Realität, im Gegensatz beipielsweise zur Isotopie zweier Knoten. Die betrachteten Objekte und Operationen sind daher abstrakt und werden bei den SuS kaum Assoziationen auslösen. Den SuS fehlen dazu in ihrer Erfahrungswelt Situationen, aus der sie Handlungsorientierungen und Vorstellungen übertragen könnten. Dies erschwert es den SuS, eigene Entdeckungen zu machen. Hans Freudenthal (1991) plädierte daher dafür, dass Mathematikunterricht von den Erfahrungen der

SuS ausgehen sollte. Hieraus ergibt sich die Herausforderung einen Unterricht zu entwickeln, der die SuS ausgehend von vertrauten Phänomenen, durch plausibele Handlungen zur Frage nach der Klassifikation der Flächen führt.

Die Frage nach der topologischen Klassifikation der Flächen wurde zuerst von Bernhard Riemann (vgl. Volkert, 2002) im Zusammenhang mit Problemen aus der Funktionentheorie gestellt. Die historische Herangehensweise ist daher in der Schule wohl nicht durchführbar.

SuS nehmen die Mathematik häufig als eine fertige Wissenschaft wahr, in der vermutlich nur noch über vernachlässigbare Details gestritten wird. Dieses Bild der Mathematik hängt Imre Lakatos (1976) zufolge mit einer Vernachlässigung der Entstehung von Fragestellungen und Begriffen im Unterricht zusammen. Wir stellen uns hierzu eine Unterrichtssituation vor, in der den SuS der Eulersche Polyedersatz vorgelegt wird und zwar in der folgenden Form: Für einfache Polyeder mit einfach zusammenhängenden Flächen gilt: Ecken – Kanten + Flächen = 2. Es folgt der klassische Beweis von Cauchy (1813). Wir nehmen an, dass die Begriffe ‚einfaches Polyeder' und ‚einfach zusammenhängende Fläche' vor der Formulierung des Satzes definiert wurden. Es mag offensichtlich sein, dass diese beiden Begriffe, durch Beispiele entstanden sind, auf die sich der Beweis von Cauchy nicht übertragen ließ. Daher wurden sie dem Polyedersatz als zusätzliche Bedingungen auferlegt. Den SuS ist dies jedoch nicht unbedingt bewusst, sodass es für sie schwer nachvollziehbar ist, wie je ein Mensch diese Bedingungen erraten konnte.

Der Autor wünscht sich jedoch, dass die Topologie von den SuS als eine lebendige, sich in ständiger Entwicklung befindliche vom Menschen geschaffene Wissenschaft erfahren wird.

Hierzu muss der Entstehung von Begriffen Zeit eingeräumt werden, sodass den SuS gezeigt werden kann, wie ein in der Anschauung begründeter Begriff, z.B. der einer Fläche, durch natürlich auftretende Fragen und Konflikte geschärft werden kann.

Im Rahmen eines math-il.de Projekts (vgl. Kaenders, 2010) und auf der Grundlage von TopWis Poincare wird daher von einer Gruppe erfahrener niederländischer Mathematiklehrer zusammen mit dem Autor an einer Unterrichtseinheit zur Topologie der Flächen gearbeitet, in der die SuS eine genetisch nachvollziehbare Entstehung der kombinatorischen Topologie nacherleben können, welche jedoch nicht notwendigerweise der tatsächlichen entspricht.

Es folgt nun ein konkreter Vorschlag, wie man in eine solche Unterrichtseinheit einsteigen könnte.

Man stelle sich eine Gebirgslandschaft auf einer Insel vor. So ein Gebirge besitzt lokal höchste Punkte, die Berge, und lokal tiefste Punkte, die Täler. Steht man auf einem Berg und möchte zu einem benachbarten Berg gelangen, so wird man eine Gratwanderung machen. Man läuft dann entlang einer Wasserscheide. Ist man jedoch in einem Tal und möchte ein benachbartes Tal erreichen, so wird man entlang eines Passes gehen. Die Kreuzung eines Passes mit einer Wasserscheide nennen wir einen Sattelpunkt. Die Anzahl der Berge, Täler und Sattelpunkte auf einer Insel kann man zählen. Besteht zwischen den Anzahlen ein Zusammenhang? Dies ist die Einstiegsfrage. Sie ist an Referenzobjekte (reale Inseln) und Referenzhandlungen (Gratwanderungen) gebunden und kann daher an die Erfahrungswelt der SuS anknüpfen. Es wird sich herausstellen, dass diese Frage uns tief in die Flächentopologie hineinzuführen vermag.


Lässt man die SuS nun ihre eigenen Inseln aus Salzteig modellieren und trägt die Anzahl der Berge, Täler und Sattelpunkte der verschiedenen Inseln in einer Tabelle zusammen, so gelangen die SuS zu der Vermutung, dass gilt: Berge + Täler = Sattelpunkte + 1.

Daraufhin wird mit den SuS ein Beweis dieses Zusammenhangs erarbeitet, der auf James Clerk Maxwell (1870) zurückgeht: Man stelle sich eine Sintflut vor. Der Meeresspiegel steigt und mit ihm steigt der Grundwasserspiegel auf der Insel gleichermaßen. Wir beobachten nun, was passiert, wenn der Meeresspiegel die Höhe eines Sattelpunktes erreicht. Das Wasser nähert sich dem Sattelpunkt von zwei Seiten. Einen Sattelpunkt, bei dem das Wasser auf beiden Seiten zum gleichen Gewässer gehört, bezeichnen wir als Landenge; gehört das Wasser zu zwei verschiedenen Gewässern, so bezeichnen wir den Sattelpunkt als Meerenge. Die Anzahl der Sattelpunkte ist also gleich der Anzahl der Landengen plus der Anzahl der Meerengen. Man kann sich nun überlegen, dass die Anzahl der Täler gleich der Anzahl der Meerengen und die Anzahl der Berge um 1 größer als die Anzahl der Landengen ist. Damit ist die Vermutung bewiesen.

Der bisher skizzierte Ablauf wurde im vorigen Jahr in einem Workshop beim internationalen Mathecamp des Känguruwettbewerbs in Eberswalde durchgeführt. Beim Bauen der Inseln fragten einige SuS, ob auch Inseln mit Höhlen oder Tunneln zugelassen wären, was zunächst nicht der Fall war. Nun aber greifen wir diese Ideen auf, um unsere Vermutung und den Beweis einer strengen Probe zu unterziehen. Wir verwenden nun also die Methode des Beweisens und Widerlegens, wie sie von Lakatos (1976) dargelegt wurde. Hierdurch verstehen wir den entdeckten Zusammenhang besser und können präzisieren, für welche Inseln er gilt.

Für Inseln mit Höhlen gilt der gefundene Zusammenhang noch stets, jedoch kann der gegebene Beweis dies nicht ohne weiteres erklären. Im Falle von Inseln mit Tunneln muss auch die Vermutung verworfen werden. Es muss nach einer neuen allgemeineren Vermutung gesucht werden. Es stellt sich heraus, dass für Inseln mit n Tunneln gilt:

$$\text{Berge} + \text{Täler} = \text{Sattelpunkte} + 1 - 2n.$$

Für zwei Inseln mit gleicher Anzahl von Tunneln gilt also der gleiche Zusammenhang. Erreicht man diese Stelle mit den SuS, so scheint die Frage nach der Klassifikation der (orientierbaren) Flächen plötzlich in Reichweite zu sein.

Der soeben skizzierte Vorschlag ist ein Versuch, das bei TopWis Poincaré auftretende Problem der fehlenden Referenzobjekte und Referenzhandlungen zu vermeiden und dennoch durch entdeckendes Lernen auf genetisch nachvollziehbare Weise zur Klassifikationsfrage zu gelangen.

Der Autor dankt Dr. Ysette Weiss-Pidstrygach für die anregenden Diskussionen.

Literatur

Cauchy, A. L. (1813). Recherches sur les Polyedrès. *Journal de l'École Polytechnique, 9,* 68-86.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education, China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kaenders, R. (2010). Entwicklung des mathematikdidaktischen Internetlabors mathil.de. *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM Verlag.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations, The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Maxwell, J. C. (1870). On Hills and Dales. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and J. Science, 40,* 421 - 425.

Volkert, K. (2002). *Das Homöomorphismusproblem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten, in der Topologie 1892-1935*. Paris: Éditions Kimé.