

Thorsten BRAUN, Engelbert NIEHAUS, Koblenz/Landau

Fehlerberechnung in Stochastischen Netzen

Bei dem Einsatz von Stochastischen Netzen in der Modellierung von realen Verteilungsprozessen ist die Wahl und Berechnung der Kantengewichte entscheidend. Inhaltlich geht es bei diesem Anwendungsbezug um die Verteilung von Gütern mit und ohne Berücksichtigung von Verbrauchs- und Produktionsprozessen. Der Schwerpunkt soll nun auf der Optimierung der Stochastischen Netze durch Verringerung der Fehler in der Vorhersage durch Anpassung der Kantengewichte sein. Daher ist es das Ziel, die Fehlerberechnung durch didaktische Reduktion für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zu ermöglichen.

1. Projekt: Mathematisches Umweltlabor

Im Mathematischen Umweltlabor wird mathematische Modellbildung im Kontext von umweltwissenschaftlichen Problemen angewendet. Durch die Teilnahme von drei unterschiedlichen Teilnehmergruppen in den Seminaren soll eine gemeinsame Lehr-Lern-Umgebung entstehen. Die drei Teilnehmergruppen sind Studierende des Diplomstudiengangs Umweltwissenschaften, Lehramtsstudierende des Faches Mathematik und Schülerinnen und Schüler mit besonderer mathematischer Begabung aus der Sekundarstufe I (Kl. 8-10), welche zu einem „Frühstudium“ an die Hochschule kommen. Die Umweltwissenschaftler bringen das notwendige Fachwissen zur Lösung des Problems mit. Die Schülerinnen und Schüler tragen mit Lösungsstrategien und logischem Denken zur Problemlösung bei. Die Lehramtsstudierende Mathematik sollen auf der einen Seite die mathematischen Modelle kennen und entwickeln, aber auch die beiden anderen Teilnehmergruppen bei fehlenden mathematischen Voraussetzungen unterstützen.

2. Stochastische Netze

Ein Stochastisches Netz besteht zunächst aus einer Menge an Knoten und Verbindungen, wobei diese Verbindungen gerichtet sind. Stochastisch wird das Netz dadurch, dass man jeder Verbindung einen Wert zuordnet, welche als Kantengewicht bezeichnet wird. Diese Kantengewichte müssen nun die Eigenschaften einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung erfüllen. Dies bedeutet, dass die Kantengewichte aus dem Intervall $[0;1]$ sein müssen und die Summe über die Kantengewichte aller von einem Knoten ausgehenden Verbindungen gleich 1 sein muss.

3. Verbindung zwischen dem Mathematischen Umweltlabor und den Stochastischen Netzen

Eine Verbindung zwischen dem Mathematischen Umweltlabor und den Stochastischen Netzen ergibt sich durch die Behandlung von umweltwissenschaftlichen Verteilungsproblemen in den Seminaren. Wenn vorliegende Flächeninformationen zum Beispiel über eine Schadstoffbelastung eines bestimmten geographischen Gebiets diskretisiert werden, gelangt man zu der Netzstruktur des Stochastischen Netzes und könnte dann Vorhersagen über die zukünftige Verteilung dieses Schadstoffes berechnen. Ob die Seminarteilnehmerinnen und Seminarteilnehmer von der Netzstruktur tatsächlich zu Stochastischen Netzen gelangen, ist nicht zwingend notwendig, sondern eine Option, die die Lehrenden als ein Modell für die Vorhersage der zukünftigen Verteilungen verwenden könnten (siehe [5] Diffusionsgleichung). Zentrale Aufgabe der Lehrenden ist es, die heterogene Gruppe ggf. bei der weiteren Präzisierung der Modellvorschläge der Lerngruppen zu unterstützen.

4. Fehlerberechnung in Stochastischen Netzen

Wenn man die Verteilung eines Schadstoffes beispielsweise auf die Knoten festgelegt hat, kann man eine Vorhersage mit dem Stochastischen Netz treffen, wie sich der Schadstoff von diesen Knoten ausgehend verteilt. Um dann die Güte dieser Vorhersage zu überprüfen, also den eventuellen Fehler des Stochastischen Netzes zu bestimmen, muss eine Datenerhebung in den Knoten durchgeführt werden, in die entsprechend der Berechnung des Stochastischen Netzes der Schadstoff verteilt wurde. Sollte diese Datenerhebung nicht mit der Prognose des Stochastischen Netzes übereinstimmen, so muss das Modell verbessert werden. Betrachtet wird nun die Anpassung der Kantengewichte, bei einem durch die Lernenden gewählten Modellierungsansatz über Stochastisches Netze. Dazu erhebt man eine Datenreihe aus mehreren Datensätzen und berechnet für jeden einzelnen Datensatz ein Kantengewicht, indem man jeweils die mobilisierten Schadstoffmengen durch die gesamte Schadstoffmenge dividiert. Nun sind durch die Lerngruppe Möglichkeiten zu untersuchen, wie man das Kantengewicht schrittweise für das Stochastische Netz bei neuen Daten anpasst. Der Mittelwert der Kantengewichte der einzelnen Datensätze ist dabei lediglich eine erste Option. Sollte beispielsweise in den Kantengewichte der Datenreihe eine abnehmende oder zunehmende Tendenz erkennbar sein, bietet es sich an mit gewichteten Mittelwerten zu arbeiten, wobei dann ältere Daten schwächer gewichtet werden sollten als jüngere Daten. Bei diesem Vorgehen bestehen Analogien zu Lernprozessen, in denen man ältere Daten nach und nach vergisst und diese dadurch nur noch geringeren Einfluss erhalten. Ziel des Modellierungsschritts ist damit die Festlegung der Gewichtung. Diese Gewichtung kann sowohl durch eine Gewichtung nach der zeitlichen Rei-

henfolge der Messungen als auch in Abhängigkeit vom Alter mit Hilfe einer stetigen Funktion erfolgen. Die Gewichtung mit einer stetigen Funktion wird zum Gegenstand der Modellbildung wenn die Lernenden den Abstand zwischen den verschiedenen Messpunkten direkt berücksichtigen wollen.

5. Lehrplanbezug

Um eine didaktische Reduktion der Fehlerberechnung von Stochastischen Netzen für den Einsatz in der Schule vornehmen zu können, muss zunächst die Frage beantwortet werden, ob es überhaupt einen Bezug zum Lehrplan Mathematik der Sekundarstufe I gibt. Dies geschieht hier im Hinblick auf den Rahmenlehrplan der Sekundarstufe I des Landes Rheinland-Pfalz.

Zunächst soll geklärt werden, ob es bereits Themen aus dem Bereich der Orientierungsstufe (Kl. 5/6) im Lehrplan gibt, deren Kenntnis für die Fehlerberechnung in Stochastischen Netzen notwendig sind. Daraus ergibt sich eine Verbindung zur Leitidee „L2: Messen und Größen“, in der eine Datensammlung und Datenerhebung gefordert wird. Die Bestimmung der Kantengewichte aus den gesammelten Daten, sowie die Berechnung der Kantengewichte und Dezimalbrüche fällt in den Bereich der Leitidee „L1: Zahl und Zahlbereiche: Bruchzahlen“. Weiterhin sollen nach der Leitidee „L5: Daten und Zufall“ absolute und relative Häufigkeiten, sowie das arithmetische Mittel behandelt werden.

Zum Lehrplan für die Klassen 7 und 8 ergibt sich eine Verbindung zur Leitidee „L1: Zahl und Zahlbereiche: Prozent- und Zinsrechnung“ durch die Bestimmung und Berechnung der Kantengewichte aus den gesammelten Daten. Außerdem erneut zur Leitidee „L5: Daten und Zufall“, nach der eine Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs erfolgen soll, sowie gewichtete Mittelwerte und in Ansätzen das Gesetz der Großen Zahlen behandelt werden soll.

6. Fazit

Ein Einsatz der Fehlerberechnung in Stochastischen Netzen als Modellierungsaufgabe in Klasse 7/8 ist, wie im Punkt 5. Lehrplanbezug erläutert, möglich, da es einige Verbindungen zwischen dem Lehrplan und den benötigten mathematischen Werkzeugen bei diesem Beispiel gibt.

Schülerinnen und Schüler erreichen bei einer ersten Beschreibung des vorhandenen Problems aus der Realität bereits einen großen Anteil des mathematischen Modellierungsprozesses. Allerdings wird die verbale Formulierung als entscheidender Schritt der Modellbildung nicht als Teil der mathematischen Lösung bewusst wahrgenommen, sondern erst wenn Formeln sichtbar werden, wird für die Lernenden Mathematik betrieben. Daher ist

es wichtig, dass die Lehramtsstudierenden mathematische Modellierung in verbalen Aussagen von Schülerinnen und Schülern erkennen können. Dazu ist es zunächst notwendig, dass die Lehramtsstudierenden selbst sowohl Probleme aus der Realität als auch mathematische Modelle verbal beschreiben können und in einem nächsten Schritt aus einer möglichst großen Anzahl von mathematischen Modellen geeignete Modellierungsansätze den verbalen Beschreibungen zuordnen können. Mit diesen möglichen Zuordnungen im Blick können die Lernenden auf dem Weg zu ihrem gewünschten Modell begleitet und mit adäquater Hilfestellungen unterstützt werden.

In den Seminaren konnte festgestellt werden, dass die Lehramtsstudierenden von sich selbst Modellierungsvorschläge auf abstrakter formaler Ebene als Ergebnis erwarten und verbale Beschreibungen in einem Modellierungsprozess als unzureichendes und nicht den Erwartung des Lehrenden entsprechendes Ergebnis einschätzen. Damit setzen die Studierenden die Hürde für Beiträge für sich selbst so hoch, dass sie überhaupt nicht mit dem Modellieren beginnen. Daher ist es besonders wichtig, dass die angehenden Lehrerinnen und Lehrer die Angst vor dem Modellieren verlieren und verbale Beschreibungen als wesentlichen Teil der mathematischen Modellierung wahrnehmen. Wenn die Angst vor falschen Aussagen und die eigenen Hürden für akzeptable Modellierungsschritte für sich selbst zu hoch eingeschätzt werden, werden Lehramtsstudierende in ihrem späteren Unterricht möglicherweise keine Modellierungsaufgaben einsetzen, weil sie die eigene Überforderung auf die Überforderung der Schülerinnen und Schüler übertragen und die verbale Formulierung von Modellierungsschritten auch bei den Schülerinnen und Schülern nicht als kreative Beiträge der mathematischen Modellierung werten.

7. Literatur

- [1] Braun, Thorsten; Niehaus, Engelbert: Förderung von Schüler(-inne)n mit besonderer mathematischer Begabung am Beispiel der Stochastischen Netze, Koblenz/Landau, (2008).
- [2] Rahmenlehrplan Mathematik, Klassenstufen 5 – 9/10, Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz (2007).
- [3] Tücke, Manfred: Schulische Intelligenz und Hochbegabung für (zukünftige) Lehrer und Eltern, Osnabrücker Schriften zur Psychologie; Bd. 9, (2005).
- [4] Smoller, Joel: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, 2. Auflage, Springer, Berlin, (1994).
- [5] Wagner, Ralf; Niehaus, Engelbert: Verbindung von Tabellenkalkulation, Dynamischer Geometriesoftware und Geographischen Informationssystemen zur Visualisierung von glatten Wegen im mathematischen Umweltlabor, Koblenz/Landau, (2009).