ASTRID BRINKMANN, Münster, MICHAEL BÜRKER, Freiburg

Vernetzung im Mathematikunterricht

1. Einleitung

Die Studien TIMSS und PISA haben Defizite deutscher SuS im Bereich vernetzten Denkens deutlich gemacht (siehe z. B. [1], [2]). Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten werden zu sehr voneinander isoliert und beziehungslos gelehrt und gelernt. Es kommt gerade zum Erwerb von Problemlösekompetenzen darauf an, verschiedene Kompetenzen, Wissenszweige, Gebiete innerhalb und außerhalb der Mathematik miteinander zu vernetzen. Im Bestreben, diese Defizite abzubauen, ist daher der Begriff *Vernetzung* zu einem der zentralen Leitbegriffe in der bundesdeutschen Mathematikdidaktik geworden. Auf internationaler Ebene ist „Connections Standard“ zu einem der 10 Standards der NCTM erhoben worden. Aus diesen Gründen hat sich ein Arbeitskreis „Vernetzung im Mathematikunterricht“ gegründet, der sich speziell dieses Themas annimmt.

2. Arbeitsschwerpunkte / Zielsetzungen

Der Arbeitskreis verfolgt die Zielsetzungen,

- innermathematische Beziehungen zwischen den in der Schule üblicherweise nebeneinander unterrichteten Teilgebiete aufzuzeigen und ins Bewusstsein der Lehrenden zu rücken,
- dazu beizutragen, dass SuS beim Erwerb zentraler Kompetenzen wie z. B. Modellieren und Problemlösen möglichst viele Gebiete der Schulmathematik miteinander vernetzen, um einen reichhaltigen Vorrat an Werkzeugen und Problemlösetechniken zu erhalten,
- Annahmen, Modelle, Berechnungsergebnisse sowie deren Interpretation und Visualisierung miteinander in Beziehung zu setzen,
- Einsicht in mathematische Zusammenhänge zu vermitteln, um damit einen breiteren Horizont zu schaffen,
- dazu beizutragen, dass SuS an vielen Beispielen lernen, dass Mathematik mehr ist als das Ausrechnen von Zahlen mit Hilfe vorgegebener Formeln.

Dementsprechend sollen auch schwerpunktmäßig

- die Methoden zum Erkennen und Lernen von Zusammenhängen und Vernetzungen wie Mind Mapping, Concept Mapping und Lernlandkarten

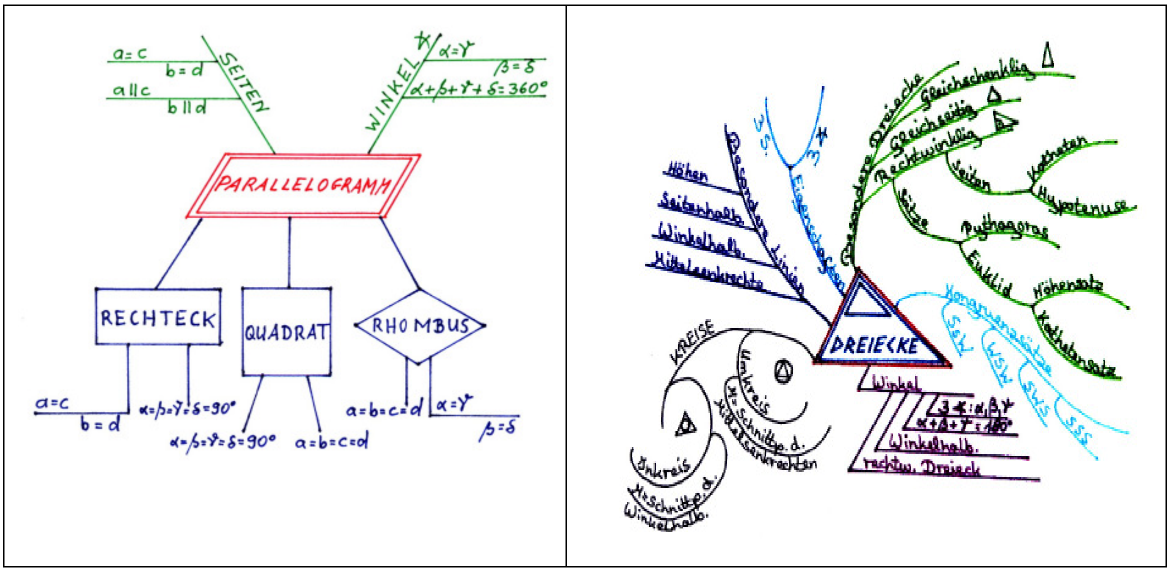
- und System Dynamics als Schlüssel zur Modellierung und zum Verständnis von vernetzten Problemen unserer Welt, insbesondere aus Umwelt, Natur und Ökonomie

für einen effizienten Einsatz im Mathematikunterricht aufbereitet und weiterentwickelt werden.

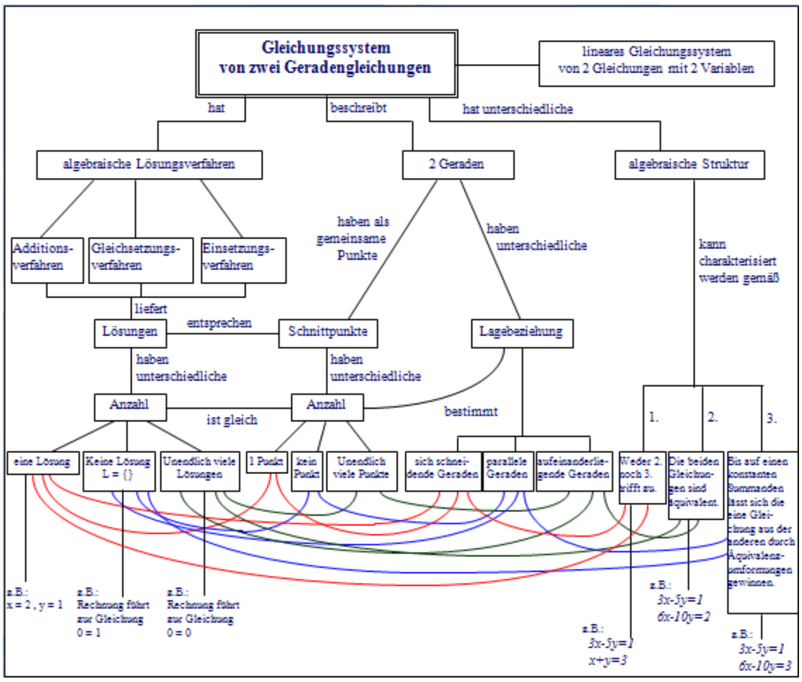
3. Graphische Darstellungen

Drei Beispiele seien hier gezeigt:

Mind Map



Concept Map



Mind Maps, Concept Maps und ähnliche graphische Netzwerkdarstellungen können als effiziente Unterrichtsmittel zum Lehren und Lernen von Mathematikvernetzungen dienen. Als Anwendungsmöglichkeiten sind insbesondere folgende hervorzuheben (ausführliche Darlegung z. B. in [3]):

- Maps zum Aufbau von Wissensnetzen durch Visualisierung geordneter Strukturen
- Anwendung von Maps beim Lernen, z. B. als zusammenfassende Wiederholung bei einer Prüfungsvorbereitung
- Maps als Visualisierung der kognitiven Strukturen von Individuen
  - Den Lernenden verhilft die Anfertigung einer Map, die die eigene Sicht auf die Struktur des Lerngegenstands visualisiert, zu einem klareren Bild über Zusammenhänge gemäß ihrer Denkstruktur.
  - Über die von Schüler/innen selbst erstellten Maps erhalten Lehrer/innen Informationen über Schülervoraussetzungen, auf denen Unterricht dann effektiver aufgebaut werden kann. Falsche Verknüpfungen werden sichtbar und können korrigiert werden.
  - Lehrende können sich ein Bild über den Wissenszuwachs bei Schüler/innen zu einer im Unterricht behandelten Thematik machen, wenn die Lernenden zu Beginn und am Ende einer Unterrichtseinheit jeweils eine Map zu dem Thema dieser Einheit zeichnen.
- Maps in der Form von „Lückentexten“ zum Lernen mathematischer Vernetzungen
- Maps als Hilfe beim Problemlösen

4. Ein Beispiel für die Vernetzung von Geometrie und Analysis beim Funktions- bzw. Ableitungsbegriff

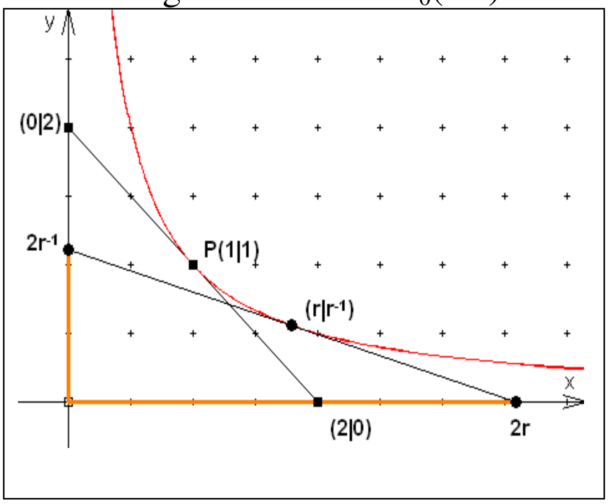
Bekanntlich gehören die Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen zum Kanon der Schulgeometrie. Erweitert man den Begriff der zentrischen Streckung in der Weise, dass man nicht nur Abbildungsgleichungen der Form $x' = kx$ und $y' = ky$ betrachtet, sondern für die Streckung in x-Richtung und in y-Richtung verschiedene Streckfaktoren, also eine Abbildungsgleichung der Form $x' = rx$ und $y' = sy$ wählt, so erhält man eine Euleraffinität, die man durch dynamische Geometrie-Software wie z. B. Dynageo leicht visualisieren kann. Während eine zentrische Streckung als Fixelemente nur das Streckzentrum Z als Fixpunkt und die durch Z gehenden Geraden als Fixgeraden hat, hat eine Euleraffinität mit verschiedenen Streckfaktoren die beiden Koordinatenachsen als Fixgeraden und den Ursprung als Fixpunkt. Es ist für die SuS eine herausfordernde Aufgabe, weitere Fixelemente herauszubekommen:

Aufgabe: *Gegeben sei der Punkt P_0 (1|1) und die Abbildung x'=2x, y'= 4y. Bestimme den Bildpunkt P_1(x'|y') von P_0, dann den Bildpunkt P_2 von P_1, usw. Auf welcher Kurve liegen die Punkte P_0, P_1, P_2?*

Als „Fixkurve" ergibt sich die Normalparabel $y = x^2$. Das heißt: Alle Punkte der Normalparabel werden durch die Abbildung $x' = 2x$ und $y' = 4y$ auf Punkte derselben Parabel und damit die Normalparabel als ganzes auf sich abgebildet.

Die Ideen lassen sich weiter verfolgen (siehe [4]):

Betrachtet man die Abbildung $x' = r \cdot x$ und $y' = 1/r \cdot y$, so ergibt sich als Fixkurve $y = 1/x$. Betrachtet man weiter die Tangente im Punkt $P_0(1|1)$, welche (aus Symmetriegründen) die Steigung -1 hat und die beiden Koordinatenachsen im Punkt Y(0|2) bzw. X(2|0) schneidet, so ergeben sich als deren Bildpunkte X'(2r|0) und Y'(0|$2r^{-1}$). Da die Tangente im Punkt $P_0(1|1)$ wieder auf eine Tangente abgebildet wird, nämlich auf die Tangente im Punkt $P_0'(r|r^{-1})$, ist deren Steigung gleich $-2r^{-1}/2r = -1/r^2$. Wir erhalten damit die Ableitungsfunktion $x \quad -1/x^2$ auf rein abbildungsgeometrische Art. Diese Überlegungen waren Teil eines Unterrichtsversuchs mit SuS (Kl. 8-10) des Freiburg-Seminars im Februar 2010.



Diese Überlegungen werden im 1. Band der Schriftenreihe „Vernetzungen im Mathematikunterricht" weiter ausgeführt.

Literatur

[1] Baumert, J. u. a. 1997. *TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde.* Opladen: Leske+Budrich.

[2] Neubrand, J., M. Neubrand, H. Sibberns. 1998. „Die TIMSS-Aufgaben aus mathematikdidaktischer Sicht: Stärken und Defizite deutscher Schülerinnen und Schüler." In: W. Blum und M. Neubrand (Hrsg.). *TIMSS und der Mathematikunterricht. Informationen, Analysen, Konsequenzen.* Hannover: Schroedel Verlag GmbH, 17-27.

[3] Brinkmann, A. 2007. *Vernetzungen im Mathematikunterricht. Visualisieren und Lernen von Vernetzungen mittels graphischer Darstellungen.* Hildesheim: Franzbecker.

[4] Bürker, M. 1990. Bahnkurven affiner Abbildungen – Schnittstellen zwischen Abbildungsgeometrie und Analysis. *Didaktik der Mathematik* 18 (1990), S. 119-140.