

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN, Hannover

## **Explorative Studie zum Löseverhalten bei Geometrieaufgaben**

### **1. Theoretischer Hintergrund**

Die Nutzung von dynamischer Geometriesoftware (DGS) bietet viele Vorteile gegenüber einer Papier- und Bleistiftumgebung: Neben der Makroerstellung, dem dynamischen Messen und der Ortslinienfunktion ist hier vor Allem die dynamische Veränderbarkeit der Zeichnung im Zugmodus zu nennen: Das Ziehen an der Zeichnung erzeugt schnell eine so große Vielzahl an diskreten Varianten der zugrunde liegenden Figur, dass dies wie eine kontinuierliche Veränderung wirkt. Das dynamische Geometrieprogramm zeigt nicht nur konkrete Repräsentanten der definierten Figur auf dem Bildschirm, sondern verwaltet darüber hinaus auch noch das relationale Gefüge zwischen den Komponenten der Figur. Hölzl (1994, S.68) spricht in diesem Zusammenhang von der relationalen Modellvorstellung.

Bei Arzarello (2002) wird zwischen verschiedenen Nutzungsmodalitäten des Zugmodus unterschieden. Schüler bzw. Studierende, die Geometrieaufgaben unter Zuhilfenahme von DGS bearbeiten, wechseln bei der Bearbeitung mehrfach zwischen der Wahrnehmungsebene und der Ebenen der Theoriebildung und die DGS mit ihren Nutzungsmodalitäten des Zugmodus hat hier eine zwischen den Ebenen vermittelnde Funktion.

Die Phasen im Löseprozess von der Wahrnehmungsebene hin zur Theorieebene bezeichnet Arzarello mit *Ascending control stream*, diesen Phasen zugeordnet ist beispielsweise die Nutzungsmodalität des *Guided dragging*, bei der Basispunkte geplant so gezogen werden, dass die Zeichnung eine bestimmte Gestalt erhält. Entsprechend werden die Phasen von der Theorieebene zur Wahrnehmungsebene mit *Descending control stream* bezeichnet. Eine diesen Phasen zugeordnete Nutzungsmodalität des Zugmodus ist der *Dragging test*. Hier wird eine zuvor aufgestellte Vermutung durch die gezielte Konstruktion einer Figur und entsprechende Zugfestigkeitsprüfungen untersucht.

### **2. Forschungsfrage**

In der hier vorgestellten Studie wurde der Frage nachgegangen, ob sich die bei Arzarello beschriebenen Nutzungsmodalitäten des Zugmodus in den beobachteten Schülerprozessen wiederfinden lassen.

Untersucht wurden zwei Schülerinnen und zwei Schüler des neunten Jahrgangs mit überdurchschnittlichen Mathematikleistungen, die in mehreren

Sitzungen partnerschaftlich je vier Aufgaben, die im Sinne von Dörner (1975) Problemaufgaben sind, bearbeiteten. Grundlage der Auswertung waren Filmaufzeichnungen der Problemlöseprozesse und entsprechende Transkripte sowie die Aufzeichnungen der Schülerinnen und Schüler. Nachfolgend soll ein solcher Prozess repräsentativ vorgestellt werden.

### 3. Beispiel für einen Problemlöseprozess

Bei der von den Schülern zu bearbeitenden Aufgabe geht es um die Schnittfigur der Winkelhalbierenden in einem Viereck:

*Gegeben sei ein Viereck ABCD. E, F, G und H seien die Schnittpunkte jeweils zweier benachbarter Innenwinkelhalbierenden des Vierecks. Untersuche wie sich das Aussehen des Vierecks EFGH verändert, wenn du das Ausgangsviereck ABCD durch Ziehen an seinen Eckpunkten in unterschiedliche Formen bringst.*

Den Schülern lag der Aufgabenstellung noch eine Skizze bei. Auffällig war die große Zahl an Vermutungen, die innerhalb kürzester Zeit aufgeworfen wurden. In den nachstehenden Grafiken wird die Entwicklung von vier unterscheidbaren Vermutungen im Laufe der ersten acht Minuten dargestellt.

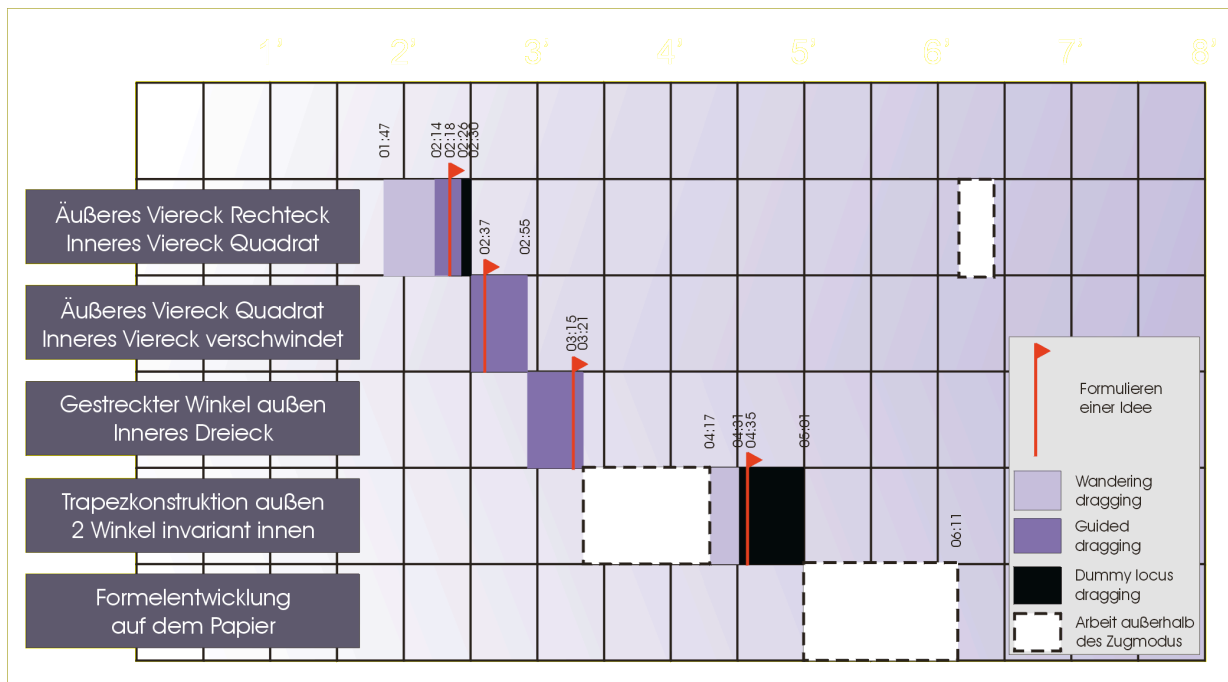


Abbildung 1

Nachdem die Schüler die entsprechende Figur konstruiert hatten, begannen sie diese mit Hilfe von *Wandering dragging*, einer noch nicht zielgerichteten, explorativen Verwendungsmodalität des Zugmodus, zu untersuchen. Einer der Schüler, Ralf, entdeckte mehr zufällig, dass sich für das innere

Viereck ein Quadrat ergibt, falls das äußere Viereck ein Rechteck ist. Er begann im Folgenden das äußere Viereck zielgerichtet zu einem Rechteck zu formen. Die zugeordnete Verwendungsmodalität heißt *Guided dragging*. 02:18 Minuten nach Aufzeichnungsbeginn formulierte Ralf seine Vermutung, in Abbildung 1 mit einer Fahne markiert. Bei der folgenden Untersuchung der Vermutung bedienten sich die beiden Schüler ebenfalls der Modalität des *Guided dragging*, indem sie durch gezieltes Ziehen an den Eckpunkten das äußere Viereck in unterschiedliche Rechteckformen brachten.

Dabei ergab sich auch zufällig eine quadratische Form für das äußere Viereck, entsprechend fielen die Eckpunkte des inneren Vierecks in einem Punkt zusammen. Diese Beobachtung führte zur nächsten Vermutung, der dann nachgegangen wurde, ohne dass die erste Vermutung abschließend untersucht worden wäre. Der entsprechende Phasenwechsel ist in Abbildung 2 durch einen Pfeilwechsel zwischen Wahrnehmungs- und Theorieebene visualisiert.

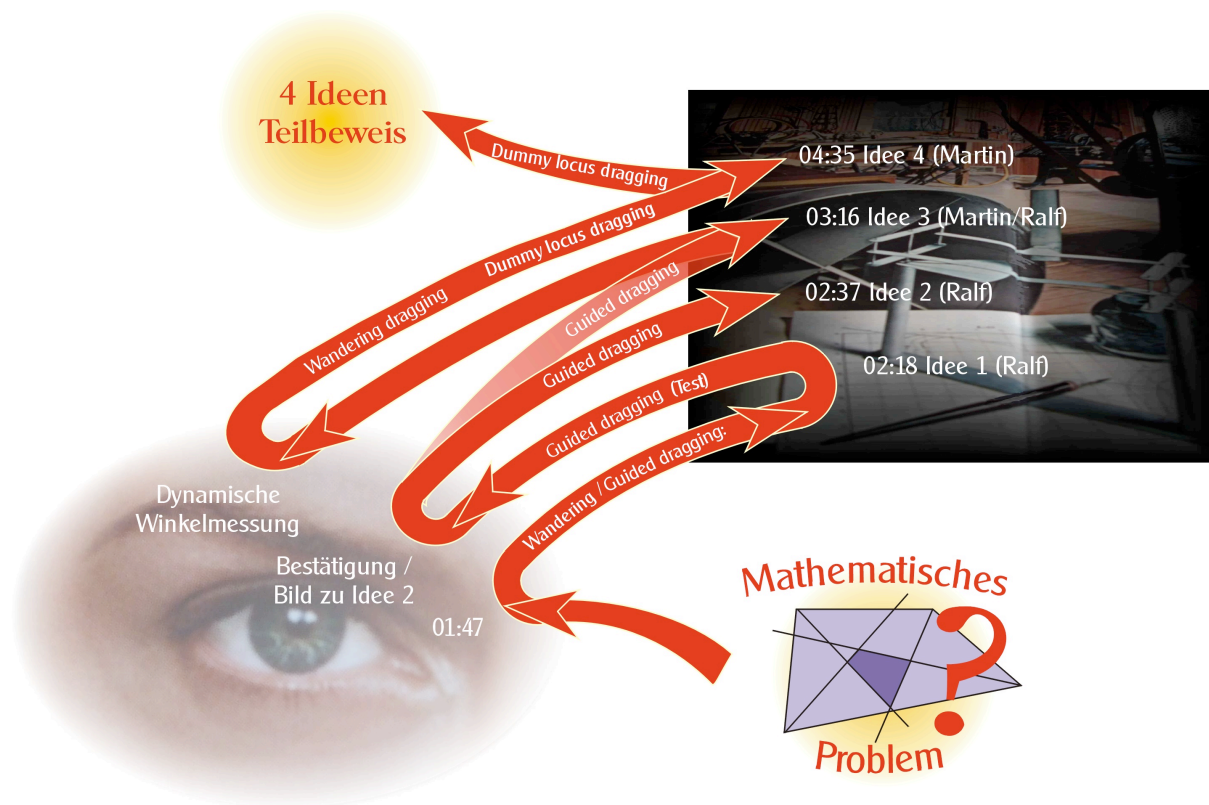


Abbildung 2

Dieses Phänomen der nicht abgeschlossenen Untersuchung von Vermutungen wiederholte sich sowohl im weiteren Verlauf dieses untersuchten Prozesses, als auch in den anderen Prozessen der Studie.

### 3. Erkenntnisse

Das von Arzarello beschriebene Wechselspiel zwischen Wahrnehmungs- und Theorieebene sowie einige Nutzungsmodalitäten des Zugmodus konnten in einigen der untersuchten Prozessen beobachtet werden. In anderen Prozessen dagegen wurden vage formulierte Vermutungen nicht mit Hilfe der DGS validiert oder es wurden immer neue Vermutungen ohne weitere Begründungen aufgestellt oder die DGS wurde zu Gunsten einer rein theoretischen Betrachtung der Aufgabe ungenutzt gelassen. Oft begnügten sich die Schülerinnen und Schüler auch damit, auf explorativer Ebene gewisse Zusammenhänge zu vermuten, ohne diese in einem mathematisch tieferen Sinn weiter zu ergründen. Insgesamt kann man sagen, dass die DGS nicht annähernd im vollen Rahmen ihrer heuristischen Möglichkeiten eingesetzt wurde. Symptomatisch für diese Beobachtungen ist auch die Tatsache, dass die Nutzungsmodalität des *Dragging test* in keinem der Prozesse beobachtet wurde.

Arzarello (2002) formuliert in diesem Zusammenhang die Hypothese, dass Schülerinnen und Schüler den Zugmodus mit seinen Möglichkeiten erst verinnerlichen müssen, um ihn produktiv einsetzen zu können. Dies erfordert eine Lernkultur, die systematisch mit DGS arbeiten lässt.

### 4. Ausblick

Zunächst müssen erheblich mehr Prozesse mit weiteren Schülern und Aufgaben durchgeführt werden. Die weiteren Untersuchungen werden sich dann darauf konzentrieren, wie DGS im Unterricht eingesetzt wird und wie dieser Einsatz optimiert werden kann. Dabei wird auch ein besonderes Augenmerk auf die Rolle des Lehrenden geworfen werden.

### Literatur

- Arzarello, F., Micheletti, Ch., Olivero, F., Robutti, O., Paola, D., Gallino, G., (1998), Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry, *Proceedings of PME XXII, Stellenbosch, S.A.*, S. 2-32 – 2-39
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., Robutti, O., (2002), A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *ZDM 2002 Vol. 34 (3)*, S. 66 - 72
- Dörner, D., (1975): *Problemlösen als Informationsverarbeitung*, Kohlhammer, Stuttgart
- Hölzl, R., (1994), *Im Zugmodus der Cabri-Geometrie*, Deutscher Studien Verlag, Weinheim
- Hölzl, R., (1999), *Qualitative Unterrichtsstudien zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software*, Wißner-Verlag, Augsburg
- Roth, J., (2005), *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*, Franzbecker Verlag, Hildesheim
- Schoenfeld, A., (1985): *Mathematical Problem Solving*, Orlando, Academic Press.