

Peter COLLIGNON, Erfurt

Zur Erweiterung der Perspektiven auf die Analysis in der Grund- und Regelschullehrerausbildung

Der Beitrag erläutert das Konzept der Analysis-Module für angehende Grund- und Regelschullehrer mit mathematischem Studienschwerpunkt an der Universität Erfurt. Die betreffenden Lehrveranstaltungen richten sich auch an Studierende anderer Hauptstudienrichtungen, die aufgrund der Wahl der „Nebens Studienrichtung Mathematik“ bis zum Bachelor-Abschluss mathematische Lehrveranstaltungen besuchen. Mit Ausnahme einiger Fachhochschüler verfügen die Studierenden nicht über einen naturwissenschaftlichen Hintergrund. Kernpunkte sind eine relativierende Einordnung des Schulstoffes sowie die Auswahl weiterführender Themen, die von der üblichen Fachsystematik abweicht und raumgeometrische Aspekte betont.

Analysis in der Orientierungsphase: Kompetenzorientierte Einordnung

Im Verlauf des ersten Studienjahres absolvieren die Teilnehmer eine vierstündige Pflichtveranstaltung zur Analysis. Der Schulstoff soll durch die Eröffnung zusätzlicher Perspektiven ergänzt werden. Eine Orientierung geben die in Danckwerts (2006) dargelegten fundamentalen Ideen des *Messens*, des *funktionalen Zusammenhangs*, der *Änderungsrate*, des *Approximierens* und des *Optimierens*. Bereits in dieser „Orientierungsphase“ spielt auch die Idee des *lokalen Linearisierens* eine Rolle. Sachaufgaben bzw. Modellierungen berücksichtigen die vergleichsweise geringen naturwissenschaftlichen Ambitionen der Teilnehmer. Dies eröffnet die Möglichkeit, jenseits (physikalischer) Standardmodelle eigene Modellierungskontexte zu finden. Beispiele dafür sind Wachstumsprozesse in ökonomischen oder sozialwissenschaftlichen Zusammenhängen (vgl. Tietze et al. (2000, S. 210 ff)). Wichtige innermathematische Ziele sind das Verständnis der Aussageverbindung, die den Grenzwertbegriff definiert, die Behebung häufig auftretender Missverständnisse im Zusammenhang mit dem Stetigkeitsbegriff sowie die begriffliche Trennung von Definitionen, allgemeingültigen Aussagen und Teilen des Kalküls, die an spezielle Voraussetzungen gebunden sind.

Beispiel: Die meisten Studierenden erinnern sich an die partielle Integration und die Integration durch Substitution im Sinne einer „Produkt-“ bzw. „Kettenregel“ der Integralrechnung. Gründe für die vermeintlich umständliche Formulierung („warum jetzt $f' \cdot g$ und nicht einfach $f \cdot g$?“) sind

nicht mehr gegenwärtig. In diesem Zusammenhang wird die Aufgabe gestellt, aus den bekannten *Differentiationsregeln selbst Integrationsregeln* herzuleiten. Auf diese Weise werden partielle Integration und Substitution als Umkehrung bekannter Ableitungsregeln „wiederentdeckt“; zuweilen wird auch die Quotientenregel in eine Integrationsregel überführt:

$$\int_a^b \frac{f'(x)g(x)}{g^2(x)} dx = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]_a^b + \int_a^b \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} dx.$$

Selbstverständlich wird diese Formel selten „gebraucht“, setzt sie doch eine sehr spezielle Gestalt der Integranden voraus. Jedoch haben Studierende, die diese Beziehung „entdecken“, das Gefüge gewisser Differentiations- und Integrationsregeln an dieser Stelle oft erstmal verstanden.

Ein *weiteres Beispiel* liefert die Relativierung des Konzepts des lokalen Linearisierens: Gibt es Alternativen zur Linearisierung als lokaler Anpassung? Diese Frage führt schnell auf die Idee eines besten lokalen quadratischen oder kubischen Abgleichs und damit – allgemeiner – auf Taylorpolynome. Weitere Variationen ergeben sich aus der Frage nach „geeigneten“ Anpassungen im Falle spezieller Funktionsklassen, etwa periodischer Funktionen. An dieser Stelle kann auch der Krümmungskreis an allgemeine Kurven bereits heuristisch behandelt werden.

Analysis in der Qualifizierungsphase: Betonung des geometrischen Aspektes

Das weiterführende Lehrangebot ab dem 3. Semester besteht aus zwei Wahlpflichtveranstaltungen zu Volumenintegralen und Differentialgeometrie. Beide Veranstaltungen sollen unabhängig voneinander besucht werden können und eröffnen nach jeweils eigener Art einen Ausblick auf eine analytische Behandlung *raumgeometrischer* Themen. Hinsichtlich des Funktionsbegriffs gibt es zwei wichtige Veränderungen: Zum einen können Definitions- bzw. Zielmenge nun ein zwei- oder dreidimensionaler Euklidischer Raum sein. Zum anderen – noch wichtiger – sind die Objekte der Anschauung jetzt nicht mehr *Funktionsgraphen*, sondern *Definitions- bzw. Bildmengen*.

Im Falle der Volumenintegrale kann eine räumliche Figur Definitionsmenge einer charakteristischen Funktion (Indikatorfunktion) sein. Die Arithmetik des Integrationsvorgangs richtet sich auf eine geeignete Beschreibung des Integrationsbereiches oder ggf. der Integrationsgrenzen und deren funktionale Abhängigkeiten voneinander.

Besonderer Stellenwert kommt dem Prinzip von Cavalieri zu, welches allgemein besagt, dass unter „geeigneten Bedingungen“ das n -dimensionale

Maß (Volumen) einer Figur durch ein Integral über die $(n - 1)$ -Maße geeigneter $(n - 1)$ -dimensionaler Schnitte bestimmt werden kann. Die Bestimmung des Kugel- oder Kegelvolumens per Integration der Flächeninhalte der Schnitkreise ist vergleichsweise elementar und führt zu einer Bestätigung bekannter Formeln. Die Grundidee des Cavalierischen Prinzips kann sogar ohne Rückgriff auf den Integralbegriff formuliert werden:

Zwei räumliche Figuren F und G haben gleiches Volumen, wenn Ihre Schnittmengen „in gleicher Höhe“ gleiche Flächeninhalte besitzen.

Das Cavalierische Prinzip steht nicht nur in Analogie zum systematischen *Abzählen*; es ist mit diesem *identisch*, wenn man einen Integralbegriff zulässt, der auf dem Zählmaß basiert.

Ebenfalls leicht zu formulieren ist der Satz von Fubini, der die Vertauschbarkeit mehrfacher Integrationen betrifft und von den Studierenden – analog zum Satz von Cavalieri – auch als *Prinzip* formuliert werden kann. Beide Prinzipien – Cavalieri und Fubini – stehen in engem Zusammenhang mit der Additivität, der Kommutativität und der Assoziativität von Zählvorgängen.

Die Lehrveranstaltung „Elemente der Differentialgeometrie“ behandelt ebene und räumliche Kurven sowie Flächen im \mathbb{R}^3 in parametrisierter Form. Die Objekte der Anschauung sind jetzt nicht Graph von Abbildungen, sondern deren *Bilder*, hier auch *Spuren* genannt. Funktionsgraphen treten lediglich als Spezialfälle auf. Dies eröffnet u.a. neue Perspektiven auf Abbildungseigenschaften wie „Injektivität“. Der (gezeichneten) Spur sieht man im Gegensatz zum Funktionsgraphen nicht an, ob sie aus einer injektiven Abbildung hervorgeht. Hier sind neue Vorstellungsinhalte von Bedeutung, z.B. die Anzahl der „Passagen“ eines Punktes der (Bahn-) Kurve.

Eine „echte“ Kurvendiskussion hat nur wenig mit dem Extremwertkalkül der Schulmathematik gemein. Die erste Ableitung führt auf Tangentialvektoren, der Anschauungsinhalt der Steigung spielt eine nachgeordnete Rolle. Weitaus wichtiger ist die *Krümmung* als Kehrwert des Radius des Krümmungskreises. Die allgemeine Formel wird über Plausibilitätsbetrachtungen begründet, ebenso das Bogenlängenintegral. Den Studierenden wird die Aufgabe gestellt, Kurven zu finden, deren Bogenlängen sie berechnen können. Dies führt zu einer intensiven Beschäftigung mit Integralen der Form

$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$, oder – im Falle von Funktionsgraphen – mit Integralen

des Typs $\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$. Durch Einsetzen bekannter Funktionsterme für f

stoßen die Studierenden auf Schwierigkeiten, die eine auf den ersten Blick einfache Formel in sich bergen kann. Als rektifizierbarer Funktionsgraph wird meist ein Zweig der Neilschen Parabel $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{3/2}$, entdeckt. Ein überraschendes Ergebnis besteht darin, dass sich die Bogenlängen gewisser Kurven, die allenfalls im Sinne impliziter Funktionen lokal als Funktionsgraphen interpretierbar sind, leichter berechnen lassen. Beispiele sind der Kreis und die logarithmische Spirale.

Anders als in der klassischen Differentialgeometrie üblich, werden auch Flächen zunächst in parametrisierter Form betrachtet („Flächenstücke“). Ziel ist ein qualitatives Verständnis der Gauß-Abbildung, die den ersten wichtigen Krümmungsbegriff für Flächen vorbereitet, vgl. Bär (2001, S. 118 ff). Von besonderer Bedeutung sind Rotationsflächen, die von einer um eine Achse rotierenden Kurve erzeugt werden. Sobald eine gewisse Sicherheit im Umgang mit parametrisierten Kurven besteht, stellt die Generierung von Rotationsflächen mithilfe solcher Kurven das räumliche Vorstellungsvermögen und die analytischen Fähigkeiten vor zumeist lösbarer Aufgaben. An dieser Stelle stoßen die Studierenden auf aus der Geographie bekannte Begriffe, die nun präzisiert und verallgemeinert werden (Breitenkreise, Meridiane; Geometrie der Kugeloberfläche).

Bemerkungen zur Didaktik

Selbstständiges Modellieren und „Entdecken“ erfordern Kompromisse hinsichtlich der formalen Behandlung der Themen, vgl. Danckwerts et al. (2006, S. 9); im Vordergrund stehen (fundamentale) Ideen. Eine – zum Teil propädeutische – Einführung in Themen der Analysis, die nicht in der Schule behandelt werden, relativiert den dort erlernten Kalkül in dem Sinne, dass seine Stellung innerhalb der Mathematik erkannt wird. Die Themenauswahl kann so erfolgen, dass das für Grund- und Regelschullehrer wichtige räumliche Vorstellungsvermögen geschult wird. Die analytische Behandlung geometrischer Motive ermöglicht eine Auseinandersetzung mit topologischen Grundkonzepten. Ausblicke auf Themen der weiterführenden Analysis, verbunden mit Hinweisen auf die Genese des jeweiligen Gebietes, sind mathematisch und mathematikdidaktisch bildungsrelevant.

Literatur

- Bär, C.: Elementare Differentialgeometrie. Berlin, New York, 2001
Danckwerts, R.; Vogel, D.: Analysis verständlich unterrichten. München, Heidelberg, 2006
Jahnke, H. N. [Hrsg.]: Geschichte der Analysis. Heidelberg, Berlin, 1999
Tietze, U.P.; Klika, M.; Wolpers, H.: Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Bd. 1 – Didaktik der Analysis. 2. Aufl.; Braunschweig, Wiesbaden, 2000