Ervin DEÁK, Budapest

Kritische Untersuchungen über den Tangentenbegriff in mathematischer, didaktischer und mathematikhistorischer Sicht

1. Dies ist eine Auffrischung meines Beitrags zur 34. Jahrestagung der GDM in Potsdam, 2000, über Probleme des Tangentenbegriffes. Es handelt sich um Untersuchungen über die traditionelle und allgemein verbreitete Inkonsequenz der Behandlung dieses Begriffes in der Schulmathematik. Die Erweiterungen des schon 2000 vorgeführten Materials basieren auf neuen Erkenntnissen anhand der Höherentwicklung meiner seit zwanzig Jahren abgehaltenen Serie von Spezialvorlesungen als Wahlfach für Lehramtskandidaten und auf das 2009 eingeführte Pflichtfach Mathematikgeschichte für Lehramtskandidaten in der Master-Ausbildung an der budapester Universität ELTE.

Durch meinen letztgenannten Kurs zieht sich als roter Faden die Erkenntnis hindurch, dass gewisse begriffliche Unzulänglichkeiten in mehreren Gebieten der Schulmathematik auf starren Traditionen beruhen, die sich auf einige wichtige mathematikhistorische Entwicklungsvorgänge zurückführen lassen. Als Motiv des mathematikgeschichtlichen Studiums hat sich das für diesen Hörerkreis als faszinierend erwiesen.

2. Bestimmend für das „Schicksal" des Tangentenbegriffs in der gesamten Schulmathematik ist die Grundschulphase, weil mit der Kreistangente über ihre Definition hinaus einige Vorstellungen verbunden sind, die sich dem Schüler stark einprägen und in der Schule niemals kritisch überprüft werden. Die spontane Übertragung dieser (zum Teil offen formulierten, zum anderen Teil unterschwelligen) Vorstellungen auf den allgemeinen Tangentenbegriff wirkt sich in den späteren Phasen negativ aus. Wir gründen unsere Betrachtungen auf eine Zusammenstellung solcher Vorstellungen.

Sei E ein Punkt einer Linie l. Die <u>*Tangente*</u> e zu l im Punkt E ist eine Gerade, die durch diesen Punkt geht und

- (I) eine Stützgerade von l in E ist;
- (I*) die einzige Gerade mit der Eigenschaft (I) ist;
- (II) mit l nur den Punkt E gemeinsam hat;
- (II*) die einzige Gerade mit der Eigenschaft (II) ist.

(Das sind andeutungsweise Formulierungen; für mathematische Definitionen bedarf es einer gewissen Lokalisierung, d. h. der Einschränkung, dass diese Verhältnisse von e zu l nur in einer Umgebung von E zu gelten brauchen.)

Die Urquelle dieser Vorstellungen liegt gewiss im gewohnten Bild einer Kreistangente. Bei dieser sehr speziellen Linie muß allerdings diese Aufzählung um eine fünfte Vorstellung erweitert werden:
Sei O der Mittelpunkt eines Kreises. *Die Tangente zum Kreis* in einem Punkt E ist eine Gerade, die durch diesen Punkt geht und

(O) orthogonal zu OE steht.

(Bei der Kreislinie entfällt für (I)−(II*) und (O) die Notwendigkeit der erwähnten Lokalisierung.)

3. In den Vorstellungen (I)−(II*) kommt nur der *Berührungs-Aspekt* des Tangentenbegriffes zum Ausdruck. Dem *Anschmiegungs-Aspekt* wird die folgende Tangentenvorstellung gerecht:

(III) Zu jedem − noch so engen − offenen Winkelbereich e_1Ee_2 mit dem Scheitel E, der e enthält, gibt es eine Umgebung U von E, so dass jener Teil von l, der in U fällt, völlig in diesem Winkelbereich verläuft.

Das ist eine geometrische Fassung eines wichtigen Begriffes der Analysis, der *Besten Linearen Approximation* (BLA). (Für den Fall, dass l der Graph einer Funktion f in der Koordinatenebene und e eine Gerade durch E nicht orthogonal zur x-Achse sind, bedeutet die Existenz der BLA bzw. ihre Steigung genau die Differenzierbarkeit von f im Punkt E bzw. den Wert des Differentialquotienten in diesem Punkt.)

Eine wichtige Quelle der Tangenten-Vorstellung (III) ist die Erfahrung, dass die „Tangenten" im Sinne von (O), (I) und (II) *der Kreislinie* auch noch im Sinne dieser „Anschmiegungs-Eigenschaft" mit dem Kreis verbunden sind. Überhaupt sind bei der Kreislinie alle erwähnten Tangenten-Vorstellungen gleichwertig. (Die entsprechenden Beweise können mit den elementarsten Mitteln der Dreiecksgeometrie geführt werden.) Der Anschmiegungs-Aspekt wurde aber jahrtausendelang wenig beachtet; im Vordergrund stand der Berührungs-Aspekt (und diese Tradition wirkt sich noch heute auf die Schulmathematik ungünstig aus).

4. Die Tangentenvorstellungen (I) bis (II*) waren schon in der griechischen Mathematik tief verwurzelt. Die 2. Definition im III. Buch von *Euklids Elementen* lautet: "*Daß sie den Kreis berühre (Tangente sei), sagt man von einer geraden Linie, die einen Kreis trifft, ihn aber bei Verlängerung nicht schneidet*." (Im Wesentlichen dieselbe Vorstellung deutet sich auch in der 3. Definition des III. Buches an: "*Daß sie einander berühren, sagt man von Kreisen, die einander treffen, ohne einander zu schneiden*." Dieser Begriff wird in den Sätzen 11-13 dieses Buches benutzt.) Das ist eine Kombination der Vorstellungen (I) und (II) über die *Kreistangente*, die dann tatsächlich (in den Sätzen 17-19 und 36-37 des III. Buches) benutzt wird.

In der Schulmathematik wird eben diese Vorstellung – meistens aber die Vorstellung (II) an sich – ohne jede Analyse oder Erklärung auf *beliebige Kurven* erstreckt, wodurch sie mit dem Tangentenbegriff der Differentialrechnung in Konflikt gerät, was wiederum nicht analysiert, sogar überhaupt nicht erwähnt wird.

Die andere wichtige Quelle der antiken Tangentenbegriffe ist die "Kegelschnittlehre" (*Conica*), das Hauptwerk des *Apollonios*. In der Auffassung des Apollonios (die sich durch das ganze Werk hindurchzieht) ist eine Tangente g an einen Kegelschnitt k eine Gerade, die mit k genau einen gemeinsamen Punkt hat *und* von diesem abgesehen gänzlich "außerhalb von k" verläuft. Das ist im Wesentlichen die von Euklid zitierte Definition, also die Kombination von (II) und (I). Im Abschnitt 35 des I. Buches wird zusätzlich gezeigt, dass eine gewisse Tangente an einen gewissen Kegelschnitt *die einzige* mit demselben Berührpunkt ist; hier erscheint also die Vorstellung (II*), u. zw. als *Verschärfung* des Tangentenbegriffes.

Sogar die Vorstellung (III) hat ihr Urbild in diesem Buch. was hier nicht nur bedeutet, dass g eine Tangente (im obigen Sinn) von k ist, sondern dass obendrein "*zwischen g und k keine von g verschiedene Gerade liegt*". Dieser Gedanke erscheint – als eine andere *Verschärfung* des Tangentenbegriffes – an mehreren Stellen des Buches. Das ist – abgesehen von der etwas naiven Formulierung – die dem Fehlen des quantorenreichen Apparats der modernen Analysis zuzuschreiben ist – unverkennbar eine treffende Beschreibung des Begriffs der BLA.

Auch in den *Elementen* Euklids erscheint die BLA. Im § 16 des III. Buches wird nämlich der folgende Satz bewiesen: *Eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkt aus gezogene derade Linie muß außerhalb des Kreises fallen, und in den Zwischenraum der geraden Linie und des Bogens läßt sich keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen; …* . Der zitierte Teil des Satzes ist von höchster Wichtigkeit für unsere Auffassung des Tangentenproblems, da er eine Urform des Begriffs der BLA darstellt.

5. Die folgenden Sätze bringen eine mathematische Analyse des Äquivalenzproblems, das in der Schulmathematik (aber auch vielerorts in der Universitätsmathematik) kritiklos oder überhaupt nicht behandelt wird.

SATZ (a). *Seien f der Graph einer Funktion in der Koordinatenebene, e eine Gerade (nicht orthogonal zur x-Achse) und* $(x_0; f(x_0)) = (x_0; e(x_0))$ *ein gemeinsamer Punkt von f und e. Ist f an der Stelle* x_0 *lokal streng konvex, so gilt auf f und e bezogen* $(\mathrm{I}^*) \Leftrightarrow (\mathrm{III}) \Leftrightarrow (\mathrm{II}^*)$. (Auch (1*) und (2*) sollten eigentlich lokalisiert werden.)

SATZ (b). *Seien f der Graph einer Funktion in der Koordinatenebene, für die an einer Stelle* x_0 *die BLA existiert, und e eine Gerade durch den Punkt* $(x_0; f(x_0))$, *die in einer Umgebung von* x_0 *untere oder obere Stützgerade von* f *ist. Dann ist e diese BLA.*

SATZ (c). *Sei f an einer Stelle* x_0 *lokal streng konvex, und es existiere die BLA für f an dieser Stelle. Sei weiter e eine Gerade durch den Punkt* $(x_0; f(x_0))$. *Dann gilt auf f und e bezogen* $(\mathrm{I}) \Leftrightarrow (\mathrm{I}^*) \Leftrightarrow (\mathrm{III}) \Leftrightarrow (\mathrm{II}^*)$.

In diesen Sätzen finden wir eine Erklärung der sonderbaren Tatsache, dass die inadäquaten Tangentenvorstellungen Jahrtausende hindurch benutzt worden sind (und auch heute noch in der Schulmathematik und in gewissen Gebieten der höheren Mathematik wie z. B. analytische Geometrie, projektive Geometrie u.dgl.m. vorwiegen), ohne auf mathematische Diskrepanzen zu führen. Diese Tradition geht auf die griechische Mathematik zurück, wo eine nicht-gerade Linie meistens einen Kegelschnitt bedeutete. Allerdings wurden auch einige weitere Linien (z. B. die Archimedische Spirale) behandelt. Allen diesen Linien ist aber gemeinsam, dass sie die Bedingungen der obigen Sätze erfüllen. – Merkwürdigerweise ist jedoch die Eigenschaft (II) – die meistbenutzte Tangentenvorstellung in der Schulmathematik – in die Äquivalenz-Behauptung des Satzes (c) nicht mit einbezogen. Unter den Bedingungen des Satzes gilt nämlich nicht $(\mathrm{II}) \Rightarrow (\mathrm{III})$ (obwohl $(\mathrm{III}) \Rightarrow (\mathrm{II})$).

6. Dies ist eine Kostprobe des einführenden Teils einer größeren Arbeit. In dieser wird die didaktische Tendenz verfolgt, einen völlig neuartigen, konstruktiv-genetischen Erkenntnisweg zur Differentialrechnung aufzubauen. Dabei ist das Grundmotiv das Tangentenproblem. Der Anschmiegungsaspekt wird von Anfang an (auch in der elementaren Geometrie und in der elementaren Algebra) herausgestellt. Der reelle Zahlkörper wird nicht vorausgesetzt, sondern „unterwegs“ als notwendig erkannt. Der Weg zu Konvergenzbegriffen führt über die fundamentale Idee der „Kleinheit“.

Diese Konzeption ist nicht nur theoretisch tiefgründig und detailliert ausgearbeitet; ich praktiziere sie seit 25 Jahren in Schulexperimenten und in den anfangs erwähnten Spezialkursen für die universitäre Lehrerausbildung.