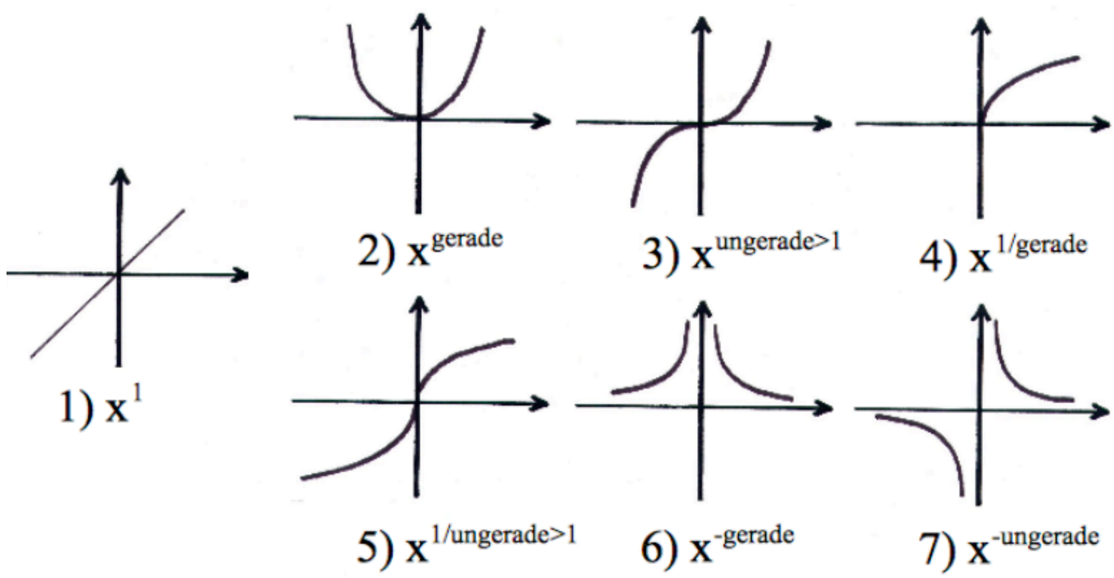
ULRICH EICHMANN, Frankfurt

Ableitung ohne Differentialrechnung

Ich stelle einen alternativen Zugang zum Begriff der lokalen Steigung in der Eingangsstufe der gymnasialen Oberstufe vor. Ziel ist, die Schülerinnen und Schüler (SuS) auf intuitive, graphisch-anschauliche Weise die wesentlichen Ideen erarbeiten und erfahren zu lassen. Verständnis wird zunächst auf sprachlicher Ebene erlangt, zahlreiche Vorstellungen und Vorerfahrungen können so aufgegriffen werden.

1. Einstieg

Die SuS werden aufgefordert, auf kleinen Folienstückchen die Graphen bestimmter Potenzfunktionen in die vorgegebenen Koordinatensysteme einzuzeichnen. Das Fehlen jeglicher Skalierungen stellt für viele zunächst ein Hindernis dar, doch wird so der Blick auf den Verlauf der Funktionen gelenkt wodurch die SuS in der nachfolgenden Besprechung der Skizzen ohne weiteren Impuls die folgenden Gruppierungen vornehmen – eine star-



ke Komplexitätsreduktion, die selbstständiges Weiterarbeiten ermöglicht.

2. Skizzieren einfacher Funktionen

Der Übergang vom Zuordnungs- zum Kovariationsaspekt wird mit der Frage, wie sich eine zusammengesetzte Funktion bei großen und kleinen Argumenten verhält, vorangetrieben. In diesem Zusammenhang werden die Rollen der jeweils dominierenden größten bzw. kleinsten Potenz geklärt. Graphen einfacher Funktionen, die aus zwei Potenzen bestehen, lassen sich nun rasch skizzieren, da hier der Betrag der Koeffizienten keine Rolle spielt.

Der Verlauf von Funktionen mit mehr als zwei Potenzen kann von den SuS begründet prognostiziert werden, für die genaue Untersuchung dieser Funktionen bietet sich wegen der Bedeutung der Koeffizienten der Einsatz von Computeralgebrasystemen an.

In der Synthese von Funktionen durch ihre einzelnen Bestandteile wenden die SuS fortwährend unbewusst das Superpositionsprinzip an und gelangen auch hier zu einem vertieften Verständnis.

Die SuS sind nun in der Lage, ohne Rechnung zahlreiche Funktionseigenschaften erkennen und beschreiben zu können.

3. MacLaurin – Entwicklung glatter Funktionen

War zunächst die Aufgabe, zu einem gegebenen Funktionsterm den zugehörigen Funktionsgraphen zu erstellen, übt man mit den SuS nun umgekehrt das Zuordnen von Funktionstermen zu Funktionsgraphen, genauer: zu bestimmten Merkmalen eines Funktionsgraphen in der Umgebung von $x=0$.

Anders als mit einem „Funktionenmikroskop“ wird im Unterricht die betrachtete Umgebung immer weiter vergrößert und man erhält immer mehr Informationen über die Funktion. Diese sind: Funktionswert, Steigung, Krümmung und eine mögliche Symmetrie. Mit diesen Angaben können die SuS begründete Aussagen über die Exponenten und die Vorzeichen der Koeffizienten machen.

In gleicher Weise können auch transzendente Funktionen für kleine x-Werte durch Potenzen dargestellt werden. Die SuS verstehen jetzt die Näherung $\sin(x) \approx x$, die im Physikunterricht bei der Behandlung der Schwingungen eines Fadenpendels meist ohne Begründung genutzt wird.

Das Verhalten trigonometrischer Funktionen bei großen Argumenten wirft die für die SuS interessante Fragestellung nach der größten, den Sinus und den Kosinus beschreibenden Potenz auf.

4. Skizzieren einer Funktion mithilfe von Null- und Polstellen

Durch Faktorisieren vertrauter Funktionen und mithilfe von Verschiebungen können die Graphen von Funktionen verstanden und skizziert werden, deren Linearfaktordarstellung vorliegt. Betrachtet wird hier nicht das Verhalten bei kleinen x-Werten, sondern in der Umgebung der Null- und Polstellen. Die einzelnen Linearfaktoren können jeweils als verschobene Geraden, Parabeln und Hyperbeln n-ter Ordnung identifiziert werden. Die entsprechende Klassifizierung der Nullstellen führt auf einfache Nullstellen bzw. mehrfache Nullstellen gerader und ungerader Ordnung, analog erfolgt eine Einteilung der Polstellen.

5. Ableitung ohne Differentialrechnung

Die bisherigen Arbeiten versetzen die SuS in die Lage, das Verhalten einer Funktion in der Umgebung eines beliebigen x-Wertes x=a zu bestimmen: Nach Verschiebung der Funktion um a und anschließender Analyse für kleine x-Werte kann mit dem Koeffizienten des linearen Terms die Steigung der Funktion bei x=a direkt angegeben werden. So erhält man beispielsweise $3a^2$ als Steigung der Funktion $f(x)=x^3$ bei x=a nach Verschiebung um a und anschließender Entwicklung von $(x+a)^3$.

Die ersten Ableitungsregeln können von den SuS direkt angegeben werden. So folgt die Potenzregel aus dem binomischen Lehrsatz, die Summenregel aus dem Superpositionsprinzip, die Faktorregel aus der Verschiebungsvorschrift und die Konstantenregel aus der Forminvarianz unter Verschiebungen in y-Richtung.

Mit der Anweisung: „Isoliere den Koeffizienten des linearen Terms der MacLaurin-Entwicklung der um a nach links verschobenen Funktion“ kann später der Differentialquotient als Ausdruck für die lokale Steigung als Verfahren gewonnen werden. Die geometrische Deutung als infinitesimales Steigungsdreieck knüpft das Konzept der lokalen Steigung an die Kenntnisse aus der Jahrgangsstufe 7 an.

6. Linearisierung

Die Linearisierbarkeit einer Funktion ist das Wesen der Differentialrechnung, die Linearisierung selbst gehört zu den bedeutendsten Näherungen und soll daher im Unterricht umfangreich behandelt werden. Linearisierungen sind so präsent, dass sie im Einstieg zahlreiche Möglichkeiten bieten, an Vorwissen und Vorerfahrungen der SuS anzuknüpfen: Das Bauen eines „runden“ Turms mit quaderförmigen Bauklötzen, ein geschälter Apfel oder schlicht eine Landkarte. Eigenschaften dieser Näherungen sind den SuS bekannt: So muss man für einen „runderen“ Turm kleinere Bauklötze benutzen oder entsprechend einen größeren, weniger gekrümmten Turm bauen. Dort, wo der Apfel stark gekrümmt war, ist das abgeschnittene Schalenstück schmaler als an Stellen, an denen der Apfel flacher war – der Gültigkeitsbereich der Linearisierung ist um so größer, je flacher die Funktion ist. Diese Einsicht ist wesentlich bei der Beantwortung der Frage, was die Formulierung „in der Nähe eines beliebigen Punktes“ konkret bedeutet.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{In der Nähe ...} & x \\ \text{… eines beliebigen Punktes ...} & a\end{array}\right\}\ (a+x)$$

$$\begin{array}{ll}\text{… verhält sich ...} & \approx\end{array}$$

… jede glatte Funktion ... f

… wie eine Gerade. $m \cdot x + b$

Mit dem y-Achsenabschnitt $b = f(a)$ und der Steigung $m = f'(a)$ lautet die Linearisierung der Funktion f: $f(a+x) \approx f'(a) \cdot x + f(a)$

Die Linearisierung entspricht der Tangente an die um a nach „links“ (dies entspricht automatisch einer Verschiebung um $|a|$ nach rechts, sollte $a<0$ sein) verschobene Funktion in $x=0$. Durch das Zurückverschieben dieser Linearisierung um a nach „rechts“ erhält man direkt die Gleichung der Tangente an die ursprüngliche Funktion $f(x)$ in $x=a$: $T_a(x) = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$

7. Einsatz der Linearisierung

Beispielhaft zunächst die näherungsweise Berechnung von Wurzeln über $\sqrt{(a+x)} \approx \sqrt{a} + 1/(2\sqrt{a}) \cdot x$, die über ihre praktische Bedeutung hinaus sehr anschaulich für verschiedene a den Begriff der „Nähe zu a“ verdeutlicht.

Als weitere Anwendungen der Linearisierung im Unterricht seien die den SuS bekannten Ausdrücke für die potentielle Energie ($m \cdot g \cdot h$) und die kinetische Energie ($\frac{1}{2}\, m \cdot v^2$) genannt, die aus dem Gravitationsgesetz bzw. der Einsteinschen Masse – Energie – Beziehung $E = mc^2$ folgen.

Durch konsequente Anwendung der Linearisierung sind auch die weiteren Ableitungsregeln (Produkt-, Quotienten- und Kettenregel und Ableitung der Umkehrfunktion) zügig, sogar von den Schülern selbstständig herleitbar.

8. Zusammenfassung

Die Betonung des Kovariationsaspektes im vorgestellten Konzept bedeutet für viele SuS zunächst ungewohnte Fragestellungen und Sichtweisen. Der handwerkliche Umgang mit Funktionen und die starke Versprachlichung sind für die SuS jedoch schon bald stark motivierend: Die SuS werden sehr sicher im Umgang mit Funktionen und können durch das aufgebaute Verständnis früh – auch in anderen Disziplinen – funktionale Zusammenhänge beschreiben.

Bewusst wird zunächst auf inhaltliche und sprachliche Strenge verzichtet. So kann an gewohnte Denk- und Wahrnehmungsweisen der SuS angeknüpft werden, die SuS werden nicht entmündigt und es lässt sich eine fehlerfreundliche Atmosphäre schaffen. In den bisherigen Erprobungen dieses Konzepts war die Beteiligung der SuS sehr hoch. Intelligentes Wissen konnte aufgebaut werden, wobei die zunächst neuen Sichtweisen zur Erweiterung der Handlungsfähigkeit der SuS führten.