

Joachim ENGEL, Ludwigsburg

Von Daten zur Funktion: Vernetzungen zwischen Modellierungskompetenzen, Geometrie und Statistical Literacy

1. Vom Wechselspiel theoriegeleiteter und datenbezogene Modellierungen

Während das dialektische Verhältnis zwischen Kontext und mathematischem Modell charakteristisch für jegliche Anwendung von Mathematik ist, so gibt es unterschiedliche Ansätze dafür, wie man Mathematik zu Fragestellungen außerhalb der Mathematik in Beziehung setzen kann. Viele Anwendungen von Mathematik sind durch einen theoriegeleiteten Ansatz bestimmt, bei dem prinzipielle Überlegungen, eine Strukturanalyse oder eine umfassende Theorie schon vorhanden ist, die die Wahl des mathematischen Modells weitgehend festlegt. Zur Validierung des Modells bietet es sich dann an, die Vorhersagekraft des Modells zu prüfen, indem z.B. Messungen vorgenommen und Daten gesammelt werden, die dann entweder mit dem Modell kompatibel sind oder eine Anpassung des Modells bzw. einen erneuten Durchlauf im Modellbildungskreislauf erfordern.

Ein anderer Modellierungsansatz schließt Daten schon von Anfang an mit ein. Diese Idee entspricht einer induktiven Vorgehensweise, die methodisch den empirischen Wissenschaften entspricht. Zu Beginn der Problemlösung wird das interessierende Phänomen zunächst genauer und möglichst unbeeinflusst von a priori erstellten Theorien betrachtet. Es werden zielgenaue Fragen formuliert, dann werden Beobachtungen gemacht, die in Form von Messungen quantifiziert werden. Erst graduell wird ein mathematisches Modell entwickelt, das die beobachteten Phänomene beschreibt und darstellt. Hier steht also zunächst ein exploratives Vorgehen im Vordergrund. Spätestens bei der Validierung des Modells kommen bei einem datenorientierten Ansatz auch theoriegeleitete Überlegungen ins Spiel: Macht das aufgestellte Modell überhaupt Sinn? Ist es kompatibel mit dem, was eine theoretische Analyse erwarten lässt? Über 50 Beispiele, Projekte und Aufgaben zu einer datenorientierten Modellierung funktionaler Abhängigkeiten finden sich in einem kürzlich erschienen Lehrbuch zur angewandten Mathematik für Lehramtsstudierende (Engel 2009).

Egal ob zunächst orientiert an theoretischen Überlegungen oder an einer Analyse erhobener Daten– die Darstellung eines außermathematischen Problems in der Sprache der Mathematik ist ein kreativer Schritt des modellbildenden Subjekts, der im Gegensatz zur Ausführung von Berechnungen nicht von Maschinen abgenommen werden kann. Bei datenbasierten Herangehensweisen liegen Modellierungskompetenzen einerseits und *statistical literacy* als die Fähigkeit, aus Daten Sinn zu erschließen, andererseits nahe beieinander und scheinen schwer voneinander abzugrenzen, worauf empirische Untersuchungen mit Lehramtsstudierenden (Engel,

Sedlmeier und Wörn, 2008) sowie Untersuchungen im Projekt RIKO-STAT (Kuntze, Engel, Martignon & Gundlach, 2010) hinweisen.

2. Geometrie und Datenanalyse

Die engen Verknüpfungen zwischen Geometrie und Algebra durchziehen die Geschichte der Mathematik. Ein guter Schulunterricht ist sich dieser Tatsache bewusst und wird an vielen Stellen auf den vernetzten Charakter mathematischen Wissens hinweisen. Weniger präsent sind Verknüpfungen zwischen Datenanalyse und Geometrie. Dabei legt der Ursprung des Wortes „Geo-metrie“ als Vermessung der Erde eine Verbindung mit Messwerten und deren Analyse nahe.

Bei Einführung der Winkelsumme im Dreieck kann man zunächst durch Messen der Innenwinkel und Addieren zur bekannten Winkelsummen-Formel gelangen. Wenn jeder Schüler diese Aktivität mit seinem individuell gezeichneten Dreieck durchführt, liegen Messdaten im Umfang der Klassenstärke vor, die sich –aufgrund von Ungenauigkeiten – wohl nicht in jedem Fall exakt zu einem gestreckten Winkel addieren, aber dennoch den Winkelsummensatz für beliebige Dreiecke vermuten lassen. Ein anderes populäres Beispiel ist die empirische Feststellung der Konstanz des Verhältnisses von Umfang zu Durchmesser von Kreisen. Viele Schulbücher führen in dieses Thema ein, indem Schüler zunächst aufgefordert sind, bei kreisrunden Objekten von der Konservendose bis zum Fahrradreifen z.B. mit einem Bindfaden den Umfang und den Radius zu messen. Gewiss werden bei diesem Messvorgang einige Ungenauigkeiten entstehen, die dennoch der Entdeckung der Proportionalität des Zusammenhangs zwischen Radius und Kreisumfang nicht im Wege stehen. Ähnlich handlungsbezogen geht der Unterricht vor, wenn das Kugelvolumen zunächst durch Umfüllversuche enaktiv ermittelt wird, bevor theoretische Überlegungen die Volumenformel exakt herleiten und begründen.

Dies sind allseits bekannte und bewährte Zugänge, die geometrische Sachverhalte zunächst von den Schülerinnen und Schülern „entdecken“ lassen, bevor theoretische Überlegungen – in der Regel vom Lehrer vorgetragen – die gewonnenen Erkenntnisse präzisieren und festigen. Allen diesen Beispielen ist in der Regel gemeinsam, dass man im Unterricht (zunächst noch) nicht die Möglichkeiten für exakte Herleitungen hat *und* dass die Messungen zu einer besseren Veranschaulichung beitragen. Ansätze zu Datenorientierung sind somit im Geometrieunterricht nicht unbekannt. Sie werden allerdings selten konsequent im Sinne einer Datenerhebung und Datenanalyse ausgeführt und als datengestütztes Arbeiten explizit thematisiert.

Biehler, Prömmel & Hofmann (2007) diskutieren ein Beispiel, bei dem am Anfang eine systematische Datenerhebung und Datenanalyse steht, bevor dann auch theoretische Überlegungen der datenbezogenen Modellierung kontrastierende gegenüber gestellt werden. Die Aufgabe bezieht sich auf das Falten eines Dreiecks aus einem

rechteckigem Blatt Papier und besteht darin, einen Zusammenhang zwischen Grundseite und Flächeninhalt des resultierenden Rechtecks zu modellieren. Biehler et al. (2007) behandeln diese Aufgabe detailliert und stellen einer empirischen, d.h. datenbezogenen Modellierung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Fläche F und Grundseite g eine theoriegeleitete Modellierung gegenüber. Ein vergleichbares Beispiel, das in Engel (2010) in ähnlicher Weise sowohl aus empirischer wie theoretischer Perspektive behandelt wird, ist die Bestimmung des optimalen Winkels zum Tor eines Fußballspielers der parallel zur Außenlinie auf das gegnerische Tor zu läuft.

Auch ein datenbezogener Mathematikunterricht wird nicht auf der Ebene von empirischen Entdeckungen stehen bleiben, sondern wird die gewonnene Hypothese durch strukturorientierte Überlegungen zu einer gefestigten Erkenntnis werden lassen. Der empirische Einstieg ermöglicht jedoch auf handlungsorientierte Weise eine Hypothese herzuleiten, die im weiteren Verlauf des Unterrichts theoretisch zu begründen ist. Geometrische Fragestellungen sind hier besonders interessant, da sie oft beide Formen der Modellierung erlauben: Zunächst können geometrische Fragen auf der Basis von Messungen erkundet werden, die dann die empirische Herleitung eines Modells ermöglichen. Andererseits gibt es – zumindest im Kontext der Schulmathematik – für geometrische Fragestellungen eine etablierte Theorie, auf deren Grundlage ein Modell deduziert werden kann. Der durch Messungen und Modellierungen empirisch entdeckte Zusammenhang provoziert ja gerade die theoretische Reflexion: Warum ist das denn so? Ist das entdeckte Resultat allgemeingültig, bzw. unter welchen Bedingungen besitzt es Gültigkeit?

Das populäre Zitat von George Box (1987, S. 424) „*All models are wrong, but some are useful*“ mag im geometrischen Kontext gar nicht mehr zutreffen, da die Theorie ein bestimmtes Modell als das „richtige Modell“ deduzieren lässt. Allerdings sollte man nicht vergessen, dass auch die theoriegeleiteten Modelle der Geometrie nur unter bestimmten Annahmen wie z.B. der Gültigkeit der Axiome der Euklidischen Geometrie Bestand haben

3. Explorativ und konfirmatorisch: Von der Synergie zweier Heransgehensweisen

Im Gegensatz zu vielen deskriptiven Modellierungen wie z.B. in der Populationsdynamik hat man bei geometrischen Fragestellungen (zumindest im Kontext der Schulmathematik) in der Regel ein rein theoriegeleitetes Modell verfügbar. Wohl wäre es frevelhaft, die Geometrie auf eine empirische Wissenschaft zu verkürzen. Die Eleganz ihrer Argumentationen und die Allgemeingültigkeit ihrer Aussagen basiert ja gerade auf theoretischen Erwägungen. In diesem Sinne scheint eine empirische Modellierung geometrischer Fragestellungen vor allem aus datenanalytischer Perspektive interessant zu sein. Denn für die Datenanalyse ist es instruktiv, eine

Situation mit empirischen Methoden anzugehen, zu der es außerdem ein theoriebasiertes Modell gibt. Im Gegensatz zu den allermeisten Anwendungen von Datenanalyse lässt sich hier die empirisch gewonnene Lösung mit der theoriegeleiteten Lösung vergleichen: Wir haben somit ein Gütekriterium für die empirische Lösung verfügbar.

Beide Zugänge zum Modellieren – sowohl der datenbezogene auf empirischen Methoden beruhende Zugang wie auch das theoriegeleitete Herangehen – bedürfen der Validierung. Gewiss gibt es – je nach Problemkontext – verschiedene Zugänge, theoriegeleitete Modelle zu validieren. Jedoch eine nahe liegende Methode zur Validierung theoretischer Modelle besteht darin, ihre Vorhersagekraft mittels neuer Daten zu prüfen. Dann entscheidet sich, ob sich das Modell bei neuen Beobachtungen bewährt oder ob es durch ein neues Modell ersetzt werden sollte. Ein theoriegeleitetes Modell, das bei dieser Erprobung zu nicht-akzeptablen Abweichungen zu erhobenen Daten führt, ist genauso wenig zu akzeptieren wie ein empirisch gewonnenes Modell, das unplausibel erscheint und überzeugenden Theorien widerspricht.

Literatur:

- Biehler, R., A. Prömmel & T. Hofmann (2007): Optimales Papierfalten – Ein Beispiel zum Thema Funktionen und Daten *Der Mathematikunterricht*, Heft 3, 23 - 32.
- Box, G. E. P. & R. Draper, N. (1987). *Empirical Model-Building and Response Surfaces*. Wiley.
- Engel, J. (2009): *Von Daten zur Funktion: Anwendungsorientierte Mathematik. Eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtstudierende*. Springer: Heidelberg
- Engel, J. (2010): Datenanalyse und Geometrie: Vom Zusammenspiel theoriegeleiteter und datenbezogener Modellierungen. Unveröffentlichtes Manuskript
- Engel, J., Sedlmeier, P & Wörn, C. (2008). Modeling scatter plot data and the signal-noise metaphor...: In: C. Batanero (Ed): *Proceedings of ICMI/ IASE Study Statistics Education in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education*.
- Kuntze, S., Engel, J., Martignon, L. & Gundlach, M. (2010): Aspects of statistical literacy between competency measures and indicators for conceptual knowledge – Empirical research in the Project “RIKO-STAT”. In: C. Reading (Ed) *Proceedings of 8th International Conference of Teaching Statistics, IASE*. (to appear)