Boris GIRNAT, Freiburg

Theoretisches und nichttheoretisches Mathematisieren

Der sogenannte Modellbildungskreislauf (Abb. 1) wird in der Mathematikdidaktik als das zentrale Schema angesehen, mit dem man den Realitätsbezug der Mathematik beschreiben kann und an dem sich ein realitätsbezogener Mathematikunterricht ausgerichten sollte: Er ist „one of the main components of the theory of teaching and learning mathematical modelling" (Kaiser, Blomhoj und Sriraman, 2006, S. 82).

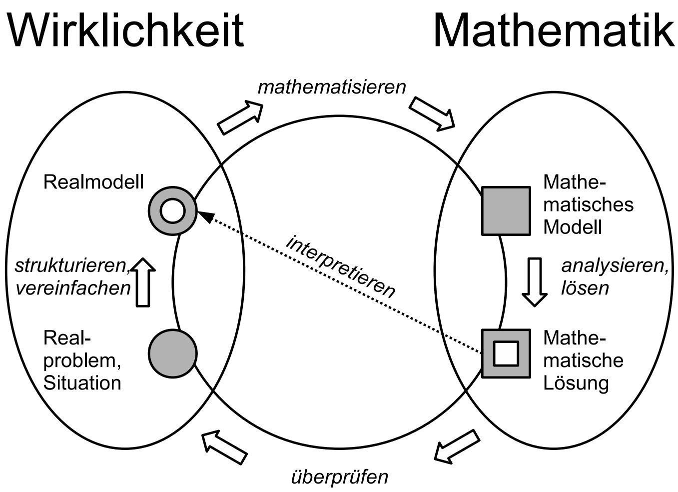

Abbildung 1: Modellbildungskreislauf

Dabei wird vorausgesetzt, dass jedem mathematischen Realitätsbezug ein Modellbildungsprozess zugrunde liegt und der Modellbildungskreislauf die wesentlichen Stationen dieses Prozesses angemessen beschreibt.

In der Wissenschaftstheorie ist das Verhältnis von Theorie und Wirklichkeit seit jeher eine zentrale Frage. Der sogenannte wissenschaftstheoretische Strukturalismus (Stegmüller 1985) hat zu diesem Thema neue Beiträge geliefert, die zunächst für axiomatisierbare wissenschaftliche Theorien der Physik gedacht waren (Sneed 1979). Dieser Ansatz wurde in der Mathematikdidaktik später allgemein für das Verhältnis von Theorie und Wirklichkeit aufgegriffen und hat sich gerade darin bewährt, die Beziehungen zwischen außermathematisch gewonnenen Vermutungen und innermathematischen Begründungen dieser Vermutungen zu beschreiben (Jahnke 1978).

Eine zentrale Grundidee des wissenschaftstheoretischen Strukturalismus ist die Unterscheidung zwischen theoretischen und nichttheoretischen Termen bzw. theoretischen und nichttheoretischen Daten (Stegmüller 1985, S. 45-52): Theoretische Terme erhalten ihre Bedeutung erst durch ihren Gebrauch innerhalb einer Gesamttheorie. „Kraft" und „Masse" sind theoretische Terme der Mechanik; „Gerade" und „Abstand" theoretische Begriffe der

Geometrie. Ihre Abhängigkeit von der Gesamttheorie wird daran deutlich, dass Kraft und Masse in der klassischen Mechanik etwas anderes bedeuten als in der relativistischen und dass Geraden und die Abstandfunktion in der euklidischen Geometrie andere Eigenschaften haben als in der projektiven oder hyperbolischen (Struve 1990, S. 92-116 und 163-167). Ähnliches gilt für Daten: Nichttheoretische Daten lassen sich ohne Bezug auf die Theorie gewinnen, für die sie erhoben werden; theoretische hingegen nicht. Diese scheinbare Paradoxie wurde zuerst in der klassischen Mechanik beobachtet, für deren Prüfung man Messinstrumente eingesetzt hat, die nach Maßgabe der klassischen Mechanik gebaut waren, also die Gültigkeit der Theorie, die es zu testen galt, bereits voraussetzten. In ähnlicher Weise ist die Entfernungsmessung in der Geometrie davon abhängig, welche Metrik man verwendet (sofern man keine nichttheoretische Messung mit Maßstäben oder -bändern vornimmt).

Dass die Unterscheidung zwischen theoretischen und nichttheoretischen Termen und Daten für didaktische Fragen des Mathematisierens bedeutsam ist, ergibt sich schon aus einem ersten Blick auf sehr einfache realitätsbezogene Aufgaben, die kaum über Einkleidungen hinausgehen und noch wenig mit ausgereiften Modellierungsaufgaben zu tun haben:

1) Miss die Fallzeit einer Eisenkugel aus verschiedenen Höhen und versuche, einen mathematischen Zusammenhang zu finden.

2) 50g Bakterien befinden sich in einer Petrischale. Stelle eine Vermutung über die Entwicklung der Bakterienkultur auf.

3) Bestimme das Gewicht und die Größe verschiedener Personen und versuche, einen mathematischen Zusammenhang zu finden.

4) Miss den Durchmesser und den Radius verschiedener Kreise und versuche, einen mathematischen Zusammenhang zu finden.

5) Beobachte die Fahrzeuge, die auf einer belebten Straße an dir vorbeifahren, und schätze nach einiger Zeit, ob du als nächstes Fahrzeug eher einen LKW, einen PKW, ein Motorrad oder ein Fahrrad erwartest.

Diese kleine Auswahl realitätsbezogener Aufgaben legt die folgende Beobachtung nahe: Die Aufgaben, die im Rahmen der Algebra oder Statistik gestellt werden, verwenden üblicherweise Daten, die unabhängig von einer mathematischen Theorie gewonnen werden: Gewichte, Längen, Geschwindigkeiten und Populationengrößen können jeweils in konkreten Messprozessen, d. h. ohne mathematische Methoden bestimmt werden. In der Geometrie gibt es demgegenüber meistens zwei Zugänge: einen theoretischen, der von Methoden, insbesondere Berechnungsverfahren der (euklidischen) Geometrie Gebrauch macht, und einen nichttheoretischen, der auf elementare Längen-, Flächen- und Volumenmessung beispielsweise mit Stäben, Einheitsquadraten oder Wasserverdrängungsversuchen beruht. In der Wahrscheinlichkeitstheorie scheint die Lage grundsätzlich anders zu sein: Die entscheidende Messgröße, die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, scheint nur aus einem theoretischen Kontext heraus zugänglich zu sein: Entweder wird die Situation selbst von Anfang an als Zufallsexperiment verstanden oder die Messreihe, wie hier im Beispiel 5, muss im Sinne des frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs gedeutet werden. In beiden Fällen ist ein theoretisches Vorverständnis nötig.

Die Überlegungen anhand der fünf Beispielaufgaben sollen als Heuristik verstanden sein. Für eine ernstzunehmende Auseinandersetzung mit dem wissenschaftstheoretischen Strukturalismus müsste überprüft werden, ob sich diese Einschätzung bei einer repräsentativen Auswahl von Aufgaben und insbesondere bei komplexeren Modellierungsproblemen aufrecht erhalten lässt. Falls das so wäre, könnten sich einige Konsequenzen für die Modellbildungsdebatte ergeben, die abschließend kurz umrissen werden.

Auf einer theoretischen Ebene wäre es fraglich, ob mit dem Modellbildungskonzept sämtlicher Realitätsbezug der Mathematik beschrieben werden kann. Der Modellbildungskreislauf setzt voraus, dass die Realsituation zuerst ohne jede Mathematik strukturiert und vereinfacht werden kann und erst anschließend der Übergang in die Mathematik vollzogen wird. Das erscheint plausibel, wenn sämtliche Daten nichttheoretisch, also unabhängig von der Mathematik gewonnen werden können – wie es vermutlich bei Mathematisierungen mit statistischem oder algebraischem Hintergrund der Fall ist. Die theoretischen Terme treten hier erst und nur im mathematischen Modell auf (Abb. 2).

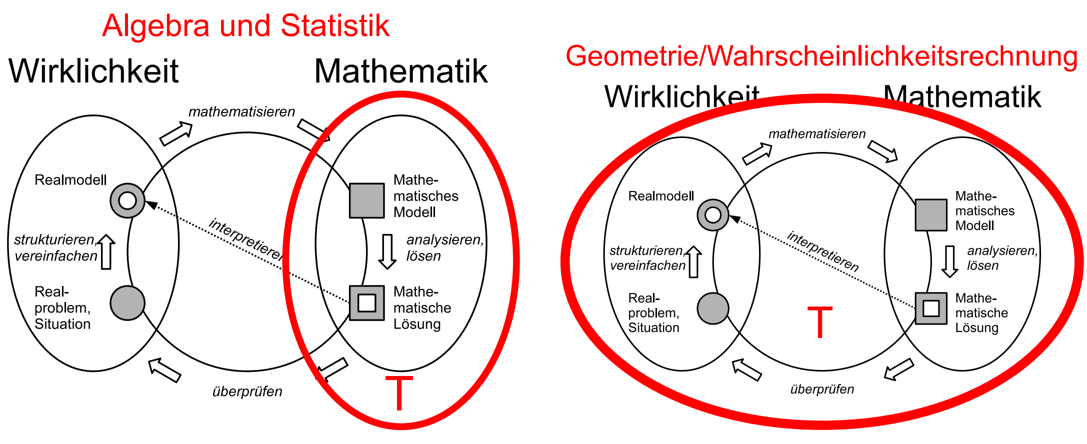

Abbildung 2: Theoretische Terme bei Mathematisierungen in der Algebra/Statistik und Geometrie/Wahrscheinlichkeitstheorie im Vergleich

Anders scheint es in der Geometrie und Wahrscheinlichkeitstheorie zu sein (Abb. 2): Hier kann bzw. muss die Situation von Anfang an durch die „mathematische Brille“ gesehen werden, d. h. man vereinfacht und strukturiert sie von vorn herein unter Benutzung mathematischer Begriffe und Theorien, etwa indem geometrische Formen identifiziert werden oder man den Blick auf Aspekte lenkt, die eine wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung erlauben. Es ist fraglich, ob man unter diesem Umstand überhaupt zwischen Realmodell und mathematischem Modell unterscheiden, also die Grundvoraussetzung des Modellierungskreislaufs anwenden kann.

In der Praxis müsste sich dieser Unterschied folgendermaßen nachweisen lassen: In der Geometrie dürfte es eine ständige Unsicherheit über die erlaubten Methoden geben: Darf experimentiert und gemessen werden oder muss man deduktiv begründen und Werte im Sinn allgemeiner Berechnungsprobleme ermitteln? Mit Houdement und Kuzniak (2001) gibt es eindeutige empirische Belege für diesen Sachverhalt. Zwischen Algebra und Statistik auf der einen Seite und Wahrscheinlichkeitstheorie auf der anderen dürfte es in der Datenanalyse einen erheblichen Unterschied geben: In der Algebra und Statistik sind die Daten unproblematisch gegeben; anschließend kann man mit der mathematischen Modellbildung beginnen und dabei außermathematisches Wissen gewinnbringend einsetzen (so wie es bei der Bakterienkultur hilfreich ist, wenn man weiß, dass sich Bakterien durch Zellteilung vermehren). In der Wahrscheinlichkeitstheorie hingegen dürfte ein alltägliches Vorwissen eher hinderlich sein, da man dadurch leicht auf „falsche" Aspekte der Situation blickt, und nicht auf die erwünschten Eigenschaften, die man nur durch ein theoretisches Vorverständnis haben kann. Aufgabe der Mathematikdidaktik wäre es, empirisch zu überprüfen, ob sich der Einfluss des theoretischen und nichttheoretischen Mathematisierens in der hier vermuteten Form tatsächlich so stellt und ob die Einteilung gemäß den mathematischen Disziplinen so aufrecht erhalten werden kann, insbesondere ob es verschiedene Modellierungsdiskurse für die einzelnen mathematischen Disziplinen geben sollte.

Literatur

Houdement, C., und Kuzniak, A. (2001): Elementary Geometry Split into Different Geometrical Paradigms. *Proceedings of CERME 3*. Bellaria, Italien (Web).

Jahnke, H. N. (1978): *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik – Beweisen als didaktisches Problem*, Bielefeld: IDM.

Kaiser, G., Blomhoj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a Didactical Theory for Mathematical Modelling. *ZDM*, 38(2), 82-85.

Sneed, J. D. (1979): *The Logical Structure of Mathematical Physics*, 2. Auflage. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stegmüller, W. (1985): Theorie und Erfahrung: Theorienstrukturen und Theoriendynamik. Band 2(2), *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und analytischen Philosophie* (2. Aufl.). Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.

Struve, H. (1990): *Grundlagen einer Geometriedidaktik*. Mannheim, Wien, Zürich: BI Wissenschaftlicher Verlag.