Svenja GRUNDEY, Hamburg

Eigenständige Beweisaktivitäten im Mathematikunterricht – Schülervorstellungen und Kompetenzen

Beweise sind ein zentrales Charakteristikum der Mathematik. Auch im Bereich der Schule hat das Begründen und Beweisen seit einigen Jahren einen größeren Stellenwert bekommen. Dies zeigt sich etwa daran, dass Argumentieren zu den prozessbezogenen Kompetenzen in den deutschen Bildungsstandards (2003) gehört. Viele empirische Studien zeigen jedoch, dass Lernende unterschiedlichen Alters meist Probleme haben, wenn sie Beweise eigenständig führen oder überprüfen sollen (Reiss, Klieme & Heinze, 2001; Healy & Hoyles, 1998; Harel & Sowder 1998).

Es stellt sich daher die Frage, wie die Beweiskompetenz von Schülerinnen und Schülern gefördert werden kann. Erste erfolgreiche Ansätze in dieser Richtung werden beispielsweise von Reiss et al. (Reiss, Klieme & Heinze, 2001) und Kuntze (2006) verfolgt, die heuristische Lösungsbeispiele und Themenstudienarbeiten als Methoden vorschlagen und im Unterricht in unterschiedlichen Klassenstufen erprobt und evaluiert haben.

Meine Ansatz folgt einer sozio-konstruktivistische Philosophie von Mathematik, in der die deduktive Methode als sozial konstruiert angesehen wird und die Antwort auf die Frage nach der Gültigkeit deduktiver Argumente von Gemeinschaft zu Gemeinschaft variiert (Reid & Knipping, in press, S. 48ff.). Indem den Schülerinnen und Schülern fiktive Schülerbeweise vorgelegt werden, wird ihnen ermöglicht, ein Beweisverständnis zu entwickeln, das an ihrem Vorwissen und ihren Vorstellungen anknüpft und gleichzeitig von der Klasse als Gemeinschaft akzeptiert werden kann. Gleichzeitig kann dieses Beweisverständnis sowohl eine Basis für eigenständig geführte Beweise bieten als auch in eigenständigen Beweisaufgaben weiterentwickelt und vertieft werden. Zur Erfassung dieser Beweisvorstellungen wurden die Lernenden am Anfang und Ende der Einheit zu diesen befragt. Dabei sollen Erkenntnisse zu den folgenden Fragestellungen gewonnen werden:

Welche Beweisvorstellungen haben Lernende am Ende der Vorstufe? Wie beeinflussen die vorhandenen Beweisvorstellungen eigenständiges Beweisen von Lernenden? Inwieweit verändern sich die Beweisvorstellungen durch das konzipierte Unterrichtsexperiment?

Konzeption des Unterrichtsexperiments und Untersuchungsmethode

Aufbauend auf empirischen Ergebnissen aus der mathematikdidaktischen Forschung zum Beweisen (z.B. Healy & Hoyles 1998, Kuntze 2006) sind beim konzipierten Unterrichtsexperiment zur Analysis Wechsel zwischen Unterrichtsdiskurs, Phasen der Metareflexion und Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler zentral. Metareflexion bezieht sich hierbei auf Beweisvorstellungen und Beweisstrategien. So wird zu Beginn des Unterrichtsexperimentes den Schülerinnen und Schülern die Frage gestellt, was ein mathematischer Beweis ist, und sie werden aufgefordert, dies schriftlich festzuhalten. Metareflexion spielt aber auch in den anschließenden Unterrichtsgesprächen eine entscheidende Rolle, in denen fiktive Schülerbeweise (angelehnt an Healy & Hoyles 1998) diskutiert werden. Während des gesamten Unterrichtsexperiments sind die Lernenden aufgefordert, ihre Beweisvorstellungen zu reflektieren, zu revidieren und zu ergänzen. In den Beweisaufgaben, bei denen die Lernenden eigenständig unbekannte, mathematische Aussagen verifizieren oder widerlegen sollen, kommt neben Beweisvorstellungen vor allem auch Beweisstrategien eine zentrale Bedeutung zu. Beweisvorstellungen und Beweisstrategien werden gemeinsam und eigenständig geklärt und entwickelt.

Die Lehrer von zwei Gymnasialklassen in Niedersachsen haben das Unterrichtsexperiment im Juni 2009 in verschiedenen Kursen der Jahrgangsstufe 10 durchgeführt. In jeder Klasse wurden sechs Unterrichtsstunden gefilmt und alle während des Unterrichts angefertigten Arbeiten kopiert. Zusätzlich habe ich am Ende des Unterrichtsexperiments Interviews mit ausgewählten Schülerinnen und Schülern geführt.

Ergebnisse

Zu Beginn des Unterrichtsexperiments zeigte sich bei den Beweisvorstellungen der Lernenden beider 10. Klassen ein sehr enges, homogenes Bild. „Beweisen als algebraisch – numerisches Verifizieren" charakterisiert diese anfänglichen engen Vorstellungen. Gemäß ihrer Vorstellung zu Beginn besteht ein mathematischer Beweis aus Umformungen von Formeln, Gleichungen sowie Rechnungen. Als Funktion eines Beweises wird ausschließlich die Verifikation einer Aussage gesehen (de Villiers 1990). Die Antworten von Johanna, Janna und Mark, von denen ich hier zwei exemplarisch anführe, zeigen eine solche enge Beweisvorstellung.

> *„ ... z.B. beweisen, dass eine Formel oder Gleichung die Ausgangsformel / gleichung ist, nur umgestellt."* *(Johanna, 10d)*
>
> *„Man hat das Ergebnis schon und muss verschiedene Formeln so kombinieren, dass das Ergebnis am Ende wieder herauskommt z.B. Satz des Pythagoras" (Janna, 10a)*

Die Analysen der eigenständigen Beweise der Lernenden in meiner Studie zeigen jedoch, dass sich diese enge Beweisvorstellung unterschiedlich auf die Konstruktionen von Beweisen auswirken kann. Bei einfachen mathematischen Aussagen aus der Analysis etwa sind die meisten Schülerinnen und Schüler in der Lage einen korrekten Beweis zu erbringen. Ihre Beweisvorstellung und die im Unterricht diskutierten Beweisstrategien anhand von fiktiven Schülerlösungen scheinen für sie eine tragfähige Basis für einen eigenständigen Beweis zu sein. Der folgende Beweis von Mark, dass der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades genau einen Wendepunkt hat, verdeutlicht dies.

> $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \varepsilon \mathbb{R}; a \neq 0)$
> $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$; $f'''(x) = 6a$
> $f''(x) = 0$, *da notw. Krit. für Wendepunkt*
> $0 = 6ax + 2b \mid -2b$
> $-2b = 6ax \quad \mid :6a$
> $-2b/6a = x$
> $-b/3a = x$
> $f'''(-b/3a) = 6a$ *und da* $a \neq 0$ *ist, gilt:* $f'''(x_E) \neq 0$. *Somit hat die Funktion einen Wendepunkt bei* $x = -b/3a$. *Aussage ist wahr.* *(Mark, 10a)*

Ein differenzierteres Bild zeigt sich jedoch bei falschen mathematischen Aussagen. Hier kann die enge algebraisch-rechnerische Vorstellung von Beweisen zum Hindernis werden. Vielen Schülerinnen und Schülern ist es nicht gelungen zu erkennen, dass die Aussage „Ein Polynom geraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.“ nicht korrekt ist. Janna aus der Klasse 10a beispielsweise bleibt ihrer engen Beweisvorstellung treu und versucht einen Beweis für die gegebene Aussage zu konstruieren, der dieser Vorstellung entspricht. Es scheint ihr unmöglich zu erkennen, dass die Aussage falsch ist. Ihre Beweisvorstellung liefert ihr keine Strategie, um mit dieser Falschaussage umzugehen, d.h. diese zu widerlegen.

> *Allg. Beschreibung eines Polynoms:*
> $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$
> $(a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n; n \in \mathbb{N}$ *und n gerade*; $a_n \neq 0)$
> *Bedingung:* $f(x) = 0$
> $0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$
> *Faktorisierung:* $0 = x\,(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1)$
> $x_1 = 0 \rightarrow$ *Satz v. Nullprodukt*
> $f(x_1) = 0$. *Da* $f(x_1) = 0$ *ist, hat die Funktion an dieser Stelle eine Nullstelle. Die Funktion hat also min. 1 Nullstelle.* *(Janna, 10a)*

Interessant ist, dass diese Problematik in meiner Studie insbesondere bei leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern zu beobachten war. Andere Lernende dagegen, etwa Johanna (10d), scheinen sich im Kontext der Falschaussage von ihrer engen Beweisvorstellung zu lösen. Johanna argumentiert mit einem Gegenbeispiel, um die Aussage zu widerlegen.

„Die Aussage ist falsch, weil, wenn der Graph nach oben verschoben oder gespiegelt an der x-Achse ist und nach unten verschoben ist, dann schneidet er sie nicht. Beispiel dafür: $f(x) = x^2 + 3$“ *(Johanna, 10d)*

Diskussion

Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass die meisten Schülerinnen und Schüler über ein rechnerisch - algebraisch geprägtes Beweisverständnis verfügen. Diese Beweisvorstellung ist zunächst eine tragfähige Basis für eigenständige Beweise im Bereich der Analysis. Ein solches Verständnis kann sich jedoch als problematisch erweisen, wenn Lernende mit falschen mathematischen Aussagen konfrontiert werden. Ein algebraisch geprägter Beweisansatz kann hier gerade für leistungsstärkere zum Hindernis werden. Durch ihre gefestigte, enge Beweisauffassung scheinen sie weder in der Lage zu sein, eine falsche Aussage zu erkennen, noch diese zu widerlegen. Andere Lernende zeigen mehr Flexibilität, sich in einem gegebenen Kontext von ihrer Beweisvorstellung zu lösen. Ein möglicher Erklärungsansatz für diese Beobachtungen weist auf vorangegangene Lernerfahrungen hin. Leistungsstarke Schülerinnen und Schülern haben die Algebra in der Regel als mächtiges Werkzeug im Unterricht kennengelernt, das ihnen in vielen Situationen zu einer Lösung verholfen hat. Es fällt ihnen somit schwer, sich von dieser Methode bzw. Vorstellung zu lösen.

Literaturverzeichnis

Harel, G.; Sowder, L. (1998): Students' Proof Scheme: Results from Exploratory Studies. In: CBMS Issues in Mathematics Education, American Mathematical Society, 7, 234-283.

Harel, G.; Sowder, L. (2003): Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof.

Healy, L.; Hoyles, C. (1998): Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey, 1998.

Kuntze, S. (2006). Themenstudienarbeit – Konzeption einer Lernumgebung für den gymnasialen Mathematikunterricht und Evaluation einer Themenstudienarbeit zum mathematischen Beweisen und Argumentieren. [Dissertation]. München: LMU.

Reid, D. A.; Knipping C. (in press): Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching. Sense Publishers, Rotterdam.

Reiss, K.; Klieme, E. & Heinze, A. (2001): Prerequisites for the Understanding of Proofs in the Geometry Classroom. Proceedings of the 25th Conference for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht.

Villiers, M. de (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. In: Pythagoras, 24, 17-23