Ján GUNČAGA, Katholische Universität in Ružomberok, Slowakei

Theorien des Erkenntnisprozesses und Mathematikunterricht

In diesem Beitrag möchten wir einige Theorien des Erkenntnisprozesses vorstellen, die in derzeitiger Mathematikdidaktik eine wichtige Rolle spielen. Sie sind mit dem Erkenntnisprozess der Schüler während Mathematikunterricht verbunden, in welchem der Lehrer eine Führend- und Koordinationsrolle spielt.

Bauer (2009) definiert Didaktik der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin, die sich mit Problemen des Lehrens und Lernens von Mathematik beschäftigt. Didaktik der Mathematik hat folgende Funktionen:

1. Wissenschaftliche Funktion: Beschreibung, Erklärung, Begründung von Lehr- und Lernprozessen (empirische Analyse, theoretische Reflexion), Entwicklung und Erprobung von Technologien (Instrumenten) für das Lehren und Lernen (Handlungsanweisungen, Benutzung von Modelle)
2. Praktische Funktion: Handeln in der Praxis, Planen und Realisieren von Unterricht.

Szendrei (2005) beschäftigt sich mit der Stellung der Mathematik im Unterricht. Sie formuliert folgende Ziele für Mathematikunterricht: Mathematik als

- Kulturerbe,
- Form des Nachdenkens,
- Kreative Tätigkeit,
- Quelle für Entdeckungen,
- die Ästhetik und Ordnung in Mustern und Strukturen,
- Wissenschaft,
- Hilfsmittel für andere Wissenschaften,
- Schulfach,
- Mittel für die Lösung von Problemen zu realen Situationen.

Für diese Aufgaben des Mathematikunterrichts ist es wichtig, passende Teile aus der Geschichte der Mathematik und realitätsbezogene Aufgaben zu benutzen. Aufgaben mit der graphischen Darstellung helfen uns Begriffe der Mathematik anschaulich zu untersuchen und Probleme der Realität zu visualisieren.

Ambrus (2004) nennt folgende Arten von Begriffen aus dem Mathematikunterricht:

1. Sachliche Begriffe: Klassifikation von realen oder gedanklichen Objekten (Funktion, Graph der Funktion, Grenzwert).
2. Relationsbegriffe: Sie zeigen Beziehungen zwischen Objekten und Gegenständen auf (Ableitung als Funktion, Stammfunktion).
3. Operationsbegriffe: Sie zeigen die Tätigkeiten und Operationen mit den Objekten und Gegenständen (Zusammengesetzte Funktion, Funktion als Summe oder Produkt von mehreren Funktionen).

Dienes (1999) analysiert den mathematischen Erkenntnisprozess und fasst die Ergebnisse seiner Untersuchungen in folgenden sechs Stufen zusammen:

1. Freies Spiel

Wir lassen Schüler spielen und mit Gegenständen und Modellen arbeiten, die später für den Erkenntnisprozess verwendet werden. Wichtig sind geeignete Gegenstände und Anlässe für Spiele. In dieser Stufe verwenden die Schüler eigene Sprechmuster.

2. Strukturiertes Spiel

Die Schüler erkennen, dass die Gegenstände Regeln erfüllen. Diese Regel führen später zu mathematischen Regeln. Der Lehrer hilft den Schülern bei der Entdeckung dieser Regel.

3. Suche nach gemeinsamen Eigenschaften in einer Struktur

In dieser Phase strukturiert der Schüler seine Kenntnisse und sucht die gemeinsamen Eigenschaften verschiedener Gegenstände. Beispielsweise kann der Schüler die Isomorphismen zwischen mehreren Strukturen sehen. Im Mathematikunterricht kann man die Logarithmusfunktion benutzen, welche die Multiplikation zur Addition transformiert.

4. Abbildung (Repräsentation)

Wenn der Schüler die Isomorphismen zwischen mehreren Strukturen in einer konkreten Form kennt, dann hilft diese Phase bei der Abstraktion. Die Isomorphismen repräsentieren wir mit einem Schema. Dienes benutzt das Beispiel für die Multiplikation der natürlichen Zahlen.

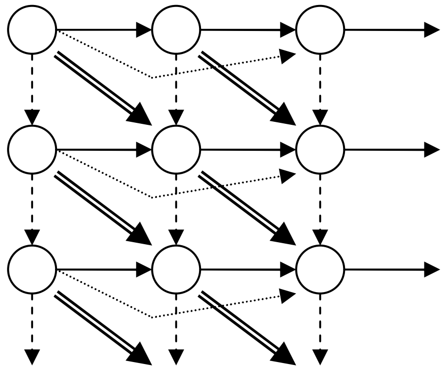

Abbildung 1

Wenn wir in die Kreise die Zahlen schreiben und der Schüler weiß, dass $\dashrightarrow$ „zweimal“ bedeutet und $\longrightarrow$ „dreimal“ bedeutet, dann kann er entdecken, dass:

a) $\Longrightarrow$ „sechsmal“ bedeutet,

b) $\cdots\rightarrow$ „viermal“ bedeutet.

Ähnlich kann man bei dieser Aufgabe beim Multiplizieren mit anderen Zahlen vorgehen. Der Schüler kann die Kreise sehr leicht bei beliebigen gegebenen Zahl in der Ecke links oben ausfüllen.

5. Symbolisierung

Die Eigenschaften in einer Struktur werden vom Schüler symbolisch ausgedrückt. Die Schüler entdecken zum Beispiel, dass die Operationen $\longrightarrow$ $\dashrightarrow$ und $\dashrightarrow$ $\longrightarrow$ äquivalent sind. Auch die Operationen $\dashrightarrow$ $\cdots\rightarrow$ und $\Longrightarrow$ $\longrightarrow$ sind äquivalent. In dieser Phase können die Schüler die Abbildung beschreiben. Deshalb nennen wir diese Beschreibungsphase auch die Einführungsphase zur mathematischen Bezeichnung.

6. Formalisierung

In dieser letzten Phase suchen wir die Regel für die entdeckten Beschreibungen und wir versuchen, diese Regel zum ersten Mal in einer formalen Form zu schreiben. Diese Formalisierung führt zur abstrakten Ebene. Die Grundeigenschaften der Struktur nennen wir Axiome und ausgehend von diesen Axiomen können wir Sätze beweisen und Grundideen entwickeln.

Zusammenhang

Im Unterrichtsprozess hat der Lehrer eine hervorgehobene Bedeutung. Deshalb möchten wir diesen Beitrag mit den Prinzipien für die Arbeit des

Lehrers beschließen, die Polya formuliert hat (siehe Pólya (1971)). Der Lehrer soll

1. sich für Fachinhalte des Unterrichts interessieren.
2. die Fachinhalte des Unterrichts gut kennen.
3. Lernstoff kennen und wissen, dass der beste Weg derjenige ist, den der Lehrer selbst entdeckt.
4. Vorstellungen der Schülern kennen: Was erwarten Sie? Was ist für sie schwierig?
5. nicht nur Fachkenntnisse an die Schüler weitergeben, sondern auch allgemeine Arbeitsfertigkeiten und Arbeitsfähigkeiten bei den Schülern entwickeln (z. B. Ordnung und korrektes Verhalten).
6. die Schüler lehren, miteinander zu diskutieren.
7. die Schüler beweisen lehren.
8. bei den Schülern heuristische Methoden für das Lösen von Aufgaben und Problemen entwickeln und ihnen in konkreten Situation eine verborgene allgemeine Strukturen aufzeigen.
9. nicht jede Problemlösung vorzeigen, sondern Schüler selbst entdecken lassen, was ihre Denkfähigkeiten fördert.
10. die Schüler nicht mit Lernstoff voll stopfen, sondern sie zu verstehensorientiertem Lernen ermutigen.

Bemerkung: Dieser Beitrag wurde unterstützt vom Grant KEGA 3/7068/09.

Literatur

Ambrus A. (2004). *Bevezetés a matematikaididaktikában.* Budapest: ELTE.

Bauer L. (2009). *Planung und Analyse von Mathematikunterricht*. Passau: Universität Passau.

Billich, M. (2008). The use of geometric place in problem solving, *Teaching Mathematics: Innovation, New Trends, Research*, Ružomberok: CU, 7 – 14.

Bryll G., Sochacki R. (2009). *Wybrane zagadnenia dydaktyki matematyki*. Poznań: Garmond.

Dienes, Z. (1999). *Építsük fel a matematikát*. Budapest: SHL Hungary, Kft.

Hajdu, S., Czeglédy, I., Hajdu Sándor, Z., Kovács, A. (2009). *Matematika 9*, Budapest: Műszaki Kiadó.

Pólya G. (1971). *A problémamegoldás iskolája*. Budapest: Tankönyvkiadó.

Szendrei J. (2005). *Gondolod, hogy egyre megy?* Budapest: Typotex Kiadó.

Takáč Z. (2003). *Klasifikácia dôkazov*. Ružomberok: CU in Ružomberok.

Žilková, K. (2009). *Potenciál prostredia IKT v školskej matematike*. Bratislava: UK.