PETRA HAUER-TYPPELT, Wien

Wahrscheinlichkeit, Zufall, Erwartungswert – und das alles aus einem Spiel?

1. Grundsätzliche Überlegungen – die Argumentationsbasis des Spiels

Basierend auf der Überzeugung, dass angemessene Grundvorstellungen zu den Grundbegriffen „Zufall", „Wahrscheinlichkeit" und „Erwartungswert" ein erklärtes Ziel jedes Stochastikunterrichts sein müssen, wird ein Spiel für den stochastischen Anfangsunterricht vorgestellt, das dem Aufbau dieser dient. Abgesehen davon, dass sie essentielle Voraussetzung für den weiteren Stochastikunterricht sind, sind angemessene Grundvorstellungen unabdingbar, um stochastische Situationen außerhalb des Mathematikunterrichts überhaupt wiedererkennen und damit auch einschätzen bzw. bewerten zu können. Gerade die wesentlichen Basisbegriffe des gesamten Gebietes „Zufall" und „Wahrscheinlichkeit" sind durch die Überlappung mit der Alltagssprache oft nicht adäquat besetzt bzw. das Verständnis durch nicht angemessene Intuitionen beeinträchtigt. Darüber hinaus erfordern die Besonderheiten der Begriffe – für den Begriff „Zufall" gibt es keine Definition, der Begriff „Wahrscheinlichkeit" vereint unterschiedliche Aspekte in sich – besonderes Engagement im Aufbau eines tragfähigen Begriffsverständnisses. Das muss im Stochastikunterricht durchgehend, insbesondere im Anfangsunterricht, berücksichtigt werden und auch für die Schülerinnen und Schüler durch die ausreichende Zuteilung von Zeit und Vermittlung von Wertigkeit erkennbar sein.

2. Die Aufgabenstellung – Das Spiel

Jede/r von euch wählt eine Zahl von 2 bis 12. Ihr würfelt abwechselnd jeweils mit zwei Würfeln und zählt nach jedem Wurf die Augenzahlen zusammen. Ist die Summe der Augenzahlen genau gleich der gewählten Zahl, erhält der/die Spieler/in diese Summe gutgeschrieben. Weicht die Summe der Augenzahlen um 1 ab, erhält man eine um 1 kleinere Zahl als die Summe der Augenzahlen gutgeschrieben. In allen anderen Fällen bekommt man keine Punkte gutgeschrieben. Wer zuerst mindestens 30 erreicht, hat gewonnen. Welche Zahl sollte man wählen?

Über den Auftrag *„Spielt das Spiel und probiert mehrere Zahlen aus!"* wird eine Spielphase eingeleitet, deren Gruppenergebnisse als Klassenergebnis zusammengefasst und dokumentiert werden. Die nachstehende Tabelle 1 zeigt ein konkretes Ergebnis aus der 8. Schulstufe und dient dazu während der Spielphase entstandene Erkenntnisse zu analysieren.

Zahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
so oft gewählt:	-	-	1	6	10	32	24	10	11	13	11
so oft damit gewonnen:	-	-	-	2	4	23	14	3	4	6	3

Tabelle 1: Spielergebnisse

Aussagen wie „Es kommt darauf an, ob ich meine Zahl leicht würfeln kann und ob sie viele Punkte bringt.“ (Originalzitat eines Schülers) zeigen, dass einige Lernende die beiden entscheidenden Einflussfaktoren während des Spielens selbst erkennen.

Zu Förderung dieser Einsichten eignen sich Fragestellungen wie: Was sagst du zu folgenden Überlegungen?
Ich wähle 12. Das ist die größte Zahl und ich bekomme am meisten Punkte! Ich wähle 11. Denn da bekomme ich nicht nur Punkte mit 11 und 12, sondern auch mit 10!

Durch diese Art von Fragestellung sollen auch Überlegungen zur Rolle des Zufalls angeregt werden, damit kann eine Auseinandersetzung mit dem Begriff auf intuitiver Ebene erfolgen.

3. Analyse des Spiels

In Folge muss es darum gehen, die Einflussfaktoren bei diesem Spiel zu präzisieren. Was genau meint die Aussage, eine Zahl sei „leicht zu würfeln“ ? Die Klärung dieser Frage sollte auf zwei verschiedene Arten in Angriff genommen werden, deren prinzipieller Unterschied für die Lernenden klar erkennbar sein muss. Einerseits über das Auszählen von absoluten Häufigkeiten und damit implizit über den Weg des empirischen Gesetzes der großen Zahlen letztlich einen frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff anpeilend (vgl. Auftrag 1), andererseits über einen theoretischen Ansatz (vgl. Auftrag 2).

Auftrag 1: Würfelt jede/r zehnmal und dokumentiert, wie oft ihr welche Augenzahl erhalten habt!

Wieder werden die Ergebnisse zum Klassenergebnis zusammengefasst und diskutiert: Welche Bedeutung haben die Ergebnisse solcher Experimente? Inwieweit können sie zur Beantwortung der Frage, welche Augensumme „leicht zu würfeln“ ist, verwendet werden? Wo liegt der Unterschied zwischen dem Ergebnis einer Einzelperson und dem Ergebnis für die ganze Klasse? Welche Schlüsse sind aus solchen experimentellen Ergebnissen überhaupt zulässig? Der Einfluss des Zufalls muss hier wieder thematisiert werden, der Begriff „wahrscheinlich" fließt erfahrungsgemäß automatisch in die Diskussion ein. Es ist darauf zu achten, dass passende Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs hervorgehoben werden.

Auftrag 2: In eine Tabelle, in deren Kopf- und Randspalte jeweils die Augenzahlen eines Würfels stehen, sollen in die Felder die entsprechende Augensumme der beiden Würfel eingetragen werden. (Aus Platzgründen hier nicht abgebildet.) Wie oft die einzelnen Augensummen bei 36 Würfen theoretisch vorkommen wird daraus entnommen und in einer weiteren Tabelle (Tabelle 2) zusammengefasst:

Augensumme	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
theoretische Anzahl bei 36 Würfen	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tabelle 2: Auftreten von Augensummen bei 36 Würfen – theoretisch ermittelt

Die Bedeutung dieses theoretisch ermittelten Ergebnisses muss im Vergleich zu den Ergebnissen des Auftrages 1 analysiert werden. Insbesondere der Unterschied hinsichtlich der Rolle des Zufalls und der Güte der Vorhersage für künftige Spiele ist zu thematisieren.

Mit den in Tabelle 2 gezeigten Werten lässt sich nun eine Vorausberechnung anstellen, welche Punktezahl für eine gewählte Zahl bei 36 Würfen „theoretisch zu erwarten" ist.
Für die Wahl der Zahl 5 ergibt sich beispielsweise:
Die Augensumme 5 kommt viermal vor, das liefert voraussichtlich $4 \cdot 5 = 20$ Punkte. Die Augensumme 6 kommt fünfmal vor, für sie werden nur 5 Punkte gutgeschrieben, man darf also theoretisch dafür $5 \cdot 5 = 25$ Punkte erwarten.Die Augensumme 4 kommt dreimal vor, man bekommt jeweils 3 Punkte gutgeschrieben, das lässt theoretisch $3 \cdot 3 = 9$ erwarten. Insgesamt ergibt die Vorausberechnung für die Wahl der Zahl 5 bei 36 Würfen $4 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 54$ Punkte.
Jeder Summand des erwarteten Wertes setzt sich aus den beiden Faktoren „theoretische Anzahl des Ereignisses (bei 36 Würfen)" und „Wert des Ereignisses" zusammen und spiegelt damit die Einflussfaktoren für die Güte einer Zahl in diesem Spiel wider. Die Übereinstimmung mit ihren Erkenntnissen aus der Spielphase – „Es kommt darauf an, ob ich meine Zahl leicht würfeln kann und ob sie viele Punkte bringt." – muss von den Lernenden erfasst werden. Erst dann ist die Verbindung von intuitivem Wissen und theoretischen Überlegungen gelungen und ein essentieller Beitrag zum Aufbau adäquater Grundvorstellungen geleistet.

Überdies zeigt sich in Idee und Berechnungsweise der theoretisch zu erwartenden Punktezahl eine Parallele zum Aufbau des Erwartungswertes einer diskreten Zufallsvariablen. Damit wird im Sinnzusammenhang passend, fernab von Vorratslernen, eine gute intuitive Grundlage für diesen wesentlichen Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung geschaffen. Analog lässt sich für die anderen zur Wahl stehenden Zahlen eine Vorausberechnung durchführen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengefasst:

gewählte Zahl	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
vorausberechnete Punktezahl	6	16	32	54	82	102	108	98	82	60	32

Tabelle 3: Theoretische zu erwartende Punktezahl für die gewählte Zahl bei 36 Würfen

Die auf theoretischen Überlegungen basierte Empfehlung lautet also die Zahl 8 zu wählen.

Um dem angestrebten Aufbau von angemessenen Grundvorstellungen zu dienen, sollte es nun zu einer Gegenüberstellung von theoretischen (Tab. 3) und experimentellen Ergebnissen (Tab. 1) kommen. Über die Analyse der Rolle des Zufalls und der Stärken bzw. Schwächen der beiden unterschiedlichen Ansätze muss herausgearbeitet und auch intuitiv erfasst werden, dass die Güte der Vorhersage durch die vorausberechneten Punktezahlen mit steigender Anzahl an Spielen wächst. Damit lässt sich ein weiteres wichtiges Ziel des Stochastikunterrichts realisieren, nämlich eine sichere intuitive Grundlage für das empirische Gesetz der großen Zahlen zu schaffen.

4. Abschließende Bemerkung

Das vorgestellte Spiel möchte durch die Auseinandersetzung mit den grundlegenden Begriffen Zufall, Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert in verschiedenen Phasen – Spielphase, Erhebung experimenteller Ergebnisse, Motivation und Durchführung theoretischer Ansätze – und damit aus unterschiedlichen Blickwinkeln zum Aufbau angemessener Grundvorstellungen beitragen. Selbstverständlich sind im Lernprozess eine Reihe weiterer Konfrontationen mit diesen grundlegenden Begriffen der Stochastik (in ganz anderen Sinnzusammenhängen) von Nöten um tragfähige Grundvorstellungen nachhaltig aufzubauen.

Literatur

Hauer-Typpelt, P. (2010). Tragfähige Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht. In: *Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft 42* : http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/index.html

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H.; (2002). *Didaktik der Stochastik. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 3*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.