

Herbert HENNING, Magdeburg, Nadine HERBER, Magdeburg

Spiralen – ein Phänomen für fächerübergreifendes Lernen von Mathematik

In seinem Buch *Allgemeinbildung und Mathematik* diskutiert Heymann unter anderem die Frage, welche Bildung, im Sinne von Allgemeinbildung, den Schülern durch die Schule vermittelt werden soll. Dazu entwickelte er ein Konzept, das folgende *Aufgaben allgemein bildenden Schulen* enthält:

- *Lebensvorbereitung*
- *Stiftung kultureller Kohärenz*
- *Weltorientierung*
- *Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch*
- *Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft*
- *Einiübung in Verständigung und Kooperation*
- *Stärkung des Schüler-Ichs* (Heymann 1996).

Einige Aufgaben können durch fächerübergreifenden Unterricht aufgegriffen werden.

Fächerübergreifender Unterricht bedeutet die (unterrichtliche) Beschäftigung mit einem Gebiet, indem die fachlichen Grenzen überschritten werden und andere (wie und zu welchem Zweck oder Ziel auch immer) einbezogen werden. (Beckmann 2003)

Es bedarf einen besonderen Umgang mit Mathematik im Unterricht, die weitgehend hinter Phänomenen verborgen ist. Ein mathematisches Phänomen ist die Spirale. Für den Mathematikunterricht ist sie zum einen bedeutend, da sie eine Kurve ist und der Begriff „Kurve“ im Unterricht stiefmütterlich behandelt wird. Zum anderen werden viele Fächer und viele interdisziplinäre mathematische Gebiete durch die Spirale vernetzt. Das Phänomen „Spirale“ stellt somit einen Weltbezug zur Mathematik her.

Im Folgenden wird eine mögliche Themenplanung für das Leitfach Mathematik zum Thema „Spiralen“ vorgestellt. Anschließend wird diskutiert, wie andere Unterrichtsfächer das Thema der Spirale aufgreifen können. Im Mathematikunterricht können folgende Themen behandelt werden:

- Einführung Polarkoordinaten
- Definition von Spiralen
- Beschreibung von Spiralen in Polarkoordinaten

- Besonderheiten ausgewählter Spiralen
- Konstruktionen von Spiralen
- Goldener Schnitt, Goldener Winkel
- Fibonacci-Folge
- Selbstähnlichkeit

Für die Einführung bzw. für die Herleitung der Polarkoordinaten werden Winkelfunktionen benötigt, die in Klasse 10 unterrichtet werden. Daher empfiehlt sich die Behandlung von Spiralen ab dieser Klassenstufe.

Wenn der Mathematikunterricht den Goldenen Schnitt und die Fibonacci-Folge behandelt, kann der Biologieunterricht beginnen die Phyllotaxis zu thematisieren. Fibonacci-Zahlen tauchen bei den links- und rechtsläufigen Spiralen der Blüten und Samen auf, der „Goldene Winkel“ ist bei zerstreuter Anordnung der Blätter zu finden. Ein Beispiel für ein selbstähnliches Objekt in der Natur ist der Nautilus.

In Informatik kann der Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen geübt werden. Schnell zu lösen ist zum Beispiel folgende Aufgabe zur Fibonacci-Folge: *Berechne den Quotienten a_{n+1}/a_n für einige Folgenglieder. Was stellst du fest?*

Man findet heraus, dass die Folge zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen gegen die goldene Verhältniszahl F konvergiert. Zudem lassen sich mit Tabellenkalkulationsprogrammen zu vorgegebenen Divergenzwinkeln die zugehörigen Blattstellungsmuster erstellen. Um das Sierpinski - Dreieck aus dem Pascalschen Dreieck zu erhalten, muss man dieses bis zur 31. Zeile aufschreiben. Mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms kann den Schülern diese Aufgabe erleichtert werden. Anhand des Sierpinski-Dreiecks kann die Selbstähnlichkeit eingeführt werden.

In *Astronomie* kann auf das Milchstraßensystem eingegangen werden. Die Sonne gehört als einer von mehreren hundert Milliarden Sternen diesem Sternsystem an. Neben den Sternen, die als Einzel-, Doppel- und Mehrfachsterne sowie in Sternhaufen vorkommen, befindet sich im Milchstraßensystem auch interstellare Materie (ein diffuses Gas-Staub-Gemisch). Von der Erde aus gesehen ist die Milchstraße ein schwach leuchtendes Band. Eine flache Scheibe aus Sternen und interstellare Materie stellt den Anblick des bestimmenden Bereichs des Milchstraßensystems dar. Die Sonne befindet sich in dieser galaktischen Scheibe. Die Scheibe ist durch mehrere in einer Ebene angeordnete Spiralarme strukturiert. In diesen konzentrieren sich leuchtkräftige heiße Sterne, Sternhaufen und interstellare Materie. Zwischen den Spiralarmen befinden sich Sterne mit geringeren

Leuchtstärken. Sterne und interstellare Wolken gehören nur für eine begrenzte Zeit einem Spiralarm an. Die Spiralarme selbst befinden sich in einem ständigen Werden und Vergehen. Sie sind Regionen mit hoher Sternentstehungsrate und sie enthalten viele extrem junge Sterne. Die Zentralregion des Milchstraßensystems hat die Gestalt einer leicht abgeplatteten Kugel. Eine Spiralstruktur ist dort nicht erkennbar. Die Scheibe des Milchstraßensystems wird von einem aus kugelförmigen Sternhaufen und Einzelsternen bestehenden, fast kugelförmigen Halo umschlossen. Zentralregion, Scheibe und Halo sind in einer sehr großen unsichtbaren Hülle eingebettet, der Korona. Spiralgalaxien bestehen, wie das Milchstraßensystem, aus Zentralregion, Scheibe und Halo. Sie sind wahrscheinlich auch von unsichtbaren, massereichen Koronen aus dunkler Materie umgeben. In ihren Zentren finden sich sehr viel ältere Sterne. Junge Sterne und interstellare Materie finden sich in den Spiralarmen.

In Chemie bietet sich die Belousov-Zhabotinsky-Reaktion als Experiment an. Sie ist ein Beispiel für einen homogenen chemischen Oszillator und dient häufig der Veranschaulichung chaotischer Systeme. Einige Grundkenntnisse aus der Physik zu chaotischen Systemen sind von Vorteil.

Im Religionsunterricht kann die Symbolik der Spirale in den einzelnen Religionen besprochen werden. Auch die Mystik, die die Spirale umgibt, ist interessanter Unterrichtsstoff. Eine Gerade symbolisiert zielstrebiges und kompromissloses Fortschrittsdenken. Wer dagegen einer Spirale folgt, gelangt langsam, aber sicher voran. Bekanntes wird berücksichtigt und von immer höherem Standpunkt aus betrachtet. Die Spirale steht also als Sinnbild von Wandel und Wiederkehr für zahlreiche Entwicklungsprozesse im Leben.

Im Kunstunterricht gibt es sehr viele Möglichkeiten das Thema der Spirale aufzugreifen. Schon der *Goldene Schnitt* ist in vielen Kunstwerken zu finden. So zum Beispiel in folgenden Gemälden:

- Die Sixtinische Madonna von Raffael de Santi
- Mona Lisa von Leonardo da Vinci
- Selbstbildnis sowie Adam und Eva von Albrecht Dürer

oder zum Beispiel bei folgenden Bauwerken:

- Parthenon in Athen
- (altes) Rathaus in Leipzig
- Triumphbogen des Kaisers Augustes in Rom

Albrecht Dürer war nicht nur Künstler, sondern auch Mathematiker. In der darstellenden Geometrie stieß er bis an die Grenzen der damals bekannten Mathematik vor. Er veröffentlichte drei Bücher über Geometrie, Befestigungskunst und menschliche Proportionen. Dürer reiste nach Italien, um in Bologna das perspektivische Zeichnen zu erlernen.

Vincent van Gogh entwickelte seine eigene Technik: Er setzte die Farben in kleinen Strichen nebeneinander. Um seine Gemälde noch lebendiger und bewegter zu gestalten, begann er diese Striche zu rhythmisieren und in Wellenlinien, Kreisen oder Spiralen anzuordnen. Deutlich wird dies in seinem Gemälde „Sternennacht“, in dem der Mond und die Sterne Kreise und die Wolken spiralförmig sind.

In der Architektur sind Spiralen zu finden, Bereits in der Architektur Griechenlands (etwa 900 - 50 v. Chr.). An den Tempeln unterscheidet man eine dorische, ionische und korinthische Ordnung. Bei der ionischen Ordnung (ab 570 v. Chr.) ist das Kapitell (Kopfstück einer Säule) in Erinnerung an ehemaliges pflanzliches Baumaterial zu der Schmuckform einer Schnecke (Volute) mit Blattornament ausgebildet.

Möglichkeiten der Vernetzung der verschiedenen fächerübergreifenden und fächerverbindenden Inhalte ist einer ausserunterrichtlichen Arbeitsgemeinschaft möglich.

Schwerpunktthemen können dabei sein:

Polarkoordinaten, Archimedische Spirale, Logarithmische Spirale, Goldener Schnitt Fibonacci-Folge und Goldenen Spirale, Phyllotaxis, Selbstähnlichkeit.

Materialien und Ergebnisse (Poster, Kunstobjekte von Schülern, Arbeitsblätter) mit einer Einführung in die genannten Themen sowie Aufgaben mit Lösungen sind unter <http://public.me.com/nadinegroh/de/> bereitgestellt.

Beckmann, A. Fächerübergreifender Mathematikunterricht, Franzbecker 2003

Heymann, H.W. Allgemeinbildung und Mathematik, Beltz 1996