HANS HUMENBERGER, Wien

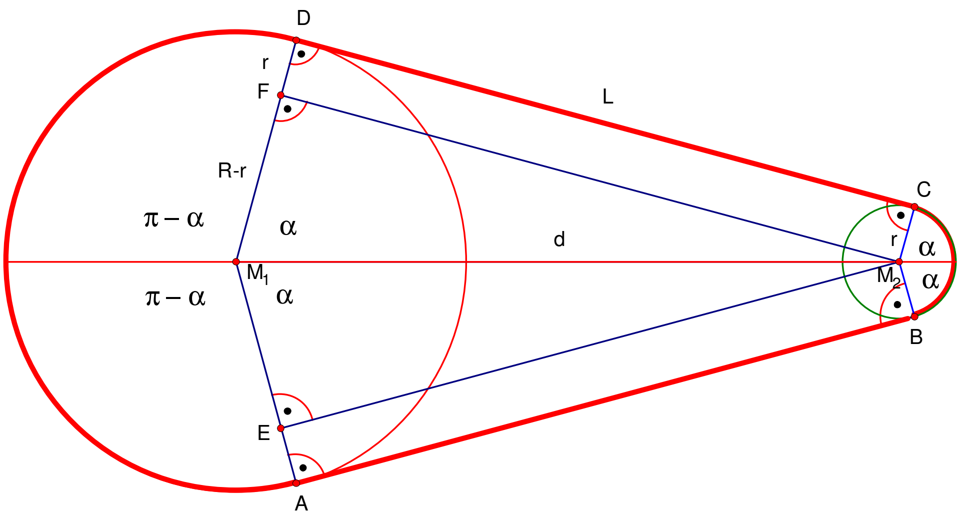
Riemengetriebe mit Zylindern und Kegeln

Im Maschinenbau sind immer wieder Riemengetriebe anzutreffen, auch heute noch, obwohl sie früher natürlich viel weiter verbreitet waren. In früheren Werkstätten ging die ganze Energieerzeugung von einer einzigen Quelle aus (z. B. Mühlrad oder Dampf) und wurde dann mittels zahlreicher Riemengetriebe auf die einzelnen Maschinen übertragen.

Man hat dabei oft das folgende Problem zu lösen **(A)**:

- Wie lang muss der Riemen sein, wenn man den Achsenabstand und die beiden Radien der beteiligten „Riemenscheiben" kennt?

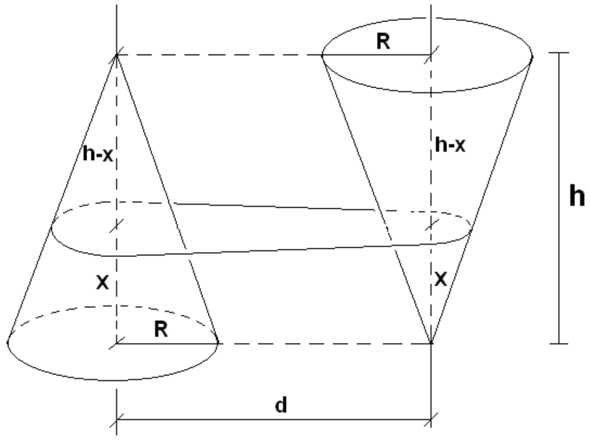
Dieses Problem kann einerseits als – relativ anspruchsvolle – Modellierungsaufgabe für Schüler(innen) formuliert werden (insbesondere in Technischen Gymnasien) oder andererseits als innermathematische Aufgabe zum selbständigen Erklären, indem Skizze und fertige Formel vorgegeben werden: „Erkläre die Formel, wie kommt sie zustande?" Auch in dieser Form müssen die Schüler(innen) wertvolle Aktivitäten an den Tag legen: Skizze interpretieren, Erkennen der Zusammenhänge (rechtwinkliges Dreieck M_1M_2F, Parallelität von M_1D und M_2C – Winkel α, etc.).



$$L = 2\left(\sqrt{d^2-(R-r)^2}+(r-R)\cdot\arccos\frac{R-r}{d}+\pi\cdot R\right) \qquad (1)$$

Eine weitere Aufgabe **(B)** für Schüler(innen) könnte im Zusammenhang mit Riemengetrieben auch so gestellt werden (vgl. Busse 2009, S. 45):

Als Riemen denken wir uns ein dünnes elastisches Gummiband und als „Riemenscheiben“ zwei kongruente Kegel (Basisradius R und Höhe h) mit Achsenabstand d (es soll klarer Weise $d > R$ gelten), wobei einer der beiden auf seiner Spitze steht.

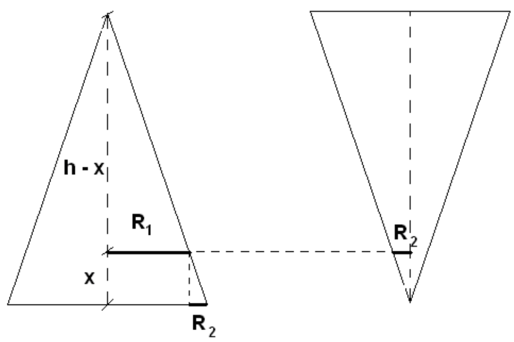


Angenommen, hier angelegte Gummibänder als „Riemen“ bleiben beim Betrieb stabil auf der jeweiligen Höhe und parallel zu den Grundflächen. Auf welcher Höhe x muss man dann ein Gummiband setzen, wenn man ein „Übersetzungsverhältnis“ 1 : 3 (bzw. 5 : 2) zwischen den Rotationsgeschwindigkeiten haben will? Welche Übersetzungsverhältnisse a : b sind hier theoretisch überhaupt denkbar? Auf welcher Höhe muss das Gummiband dafür angelegt werden?

Die Schüler(innen) müssen dabei erkennen, dass das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten bzw. der „Umdrehungen pro Minute“ ($u_1 : u_2$) durch das reziproke Verhältnis der beiden beteiligten Radien gegeben ist und dieses wiederum durch das Verhältnis der beiden Teilstrecken x und $h-x$ auf der Achse (Höhe).

$$u_1 : u_2 = R_2 : R_1 = \boxed{x : (h-x) \overset{!}{=} a : b}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{a+b} \cdot h$$



Theoretisch ist hier also jedes vorgegebene Verhältnis $a : b$ denkbar, *praktisch* – bei festen vorgegebenen Kegeln – wohl nicht, da man mit Gummibändern der Spitze nicht beliebig nahe kommen kann. Hier ist wieder eine gute Gelegenheit, über die Unterschiede zwischen dem mathematischen Modell und der Realität nachzudenken. Dass diese fragliche Höhe x, um das Übersetzungsverhältnis $a : b$ zu erreichen, nicht von der Achsendistanz d abhängt, ist wohl ziemlich klar, aber dass sie gar nicht vom Basisradius R der Kegel abhängt, ist für manche vielleicht überraschend.

In einem Unterricht sollten an dieser Stelle auch konkrete **Experimente** nicht fehlen („Mathematik zum Begreifen“); dazu kann man z. B. Holzkegel (erhältlich in einem Laden für Holzspielzeug) relativ genau durchbohren und sie auf festen Drehachsen montieren. Als Riemen können Gummiringe dienen. Hier kann man dann gut testen, ob die ausgerechnete Höhe für z. B. das Übersetzungsverhältnis 1 : 3 passt.

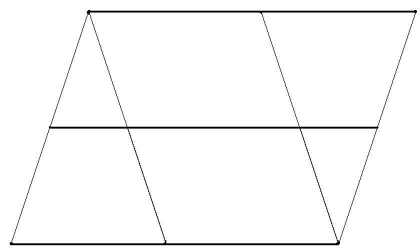
Wenn Schüler(innen) diese Aufgaben selbständig bearbeiten und sinnvolle Ergebnisse bekommen, so ist dies schon eine gute Leistung.

Bei leistungsstärkeren Klassen könnte man noch eine interessante dazu passende Frage anschließen:

(C) Die Länge des Gummibandes auf verschiedenen Höhen

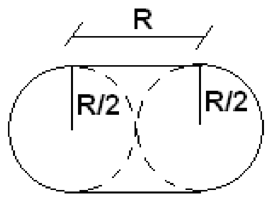
Wie entwickelt sich die Länge des Gummibandes in den möglichen Lagen (hier ist wieder parallel zu den Kegelgrundflächen gemeint) von oben nach unten bzw. von unten nach oben? Es ist klar, dass die Entwicklung symmetrisch um die Mitte erfolgt, aber nimmt die Länge zur Mitte hin zu oder ab, oder verändert sich die Länge des Gummibandes dabei vielleicht überhaupt nicht?

Ein Achsenschnitt (Aufrissdarstellung) verleitet vielleicht zur trügerischen Vermutung, dass die Bandlänge immer konstant bleibt („Parallelogramm-Argument“):



In einem leichten Spezialfall kommt man aber unmittelbar zur Tatsache $L_{\text{Mitte}} < L_{\text{Rand}}$ (auch durch Messen kommt man auf diese Vermutung):

Wir nehmen $d = R$ (d. h. die Kegel haben keinen Abstand). Dann ist das Gummiband am oberen bzw. unteren Rand ein Kreis mit Radius R: $L_{\text{Rand}} = 2\pi R \approx 6R$; in der Mitte ergibt sich die rechts abgebildete Konstellation:



$$L_{\text{Mitte}} = 2\frac{R}{2}\pi + 2R = R(\pi + 2) \approx 5R < 6R \approx L_{\text{Rand}}.$$

Auch im allgemeinen Fall $d \geq R > 0$ kann man auf einige Arten bestätigen, dass immer $L_{\text{Mitte}} < L_{\text{Rand}}$ gilt, was hier aber aus Platzgründen nicht ausgeführt werden kann.

Mit Hilfe von Formel (1) kann man sogar relativ leicht zu einer Funktion kommen, die die Längenentwicklung des Gummibandes in Abhängigkeit der Höhe beschreibt. Dabei kann man auch *analytisch* leicht bestätigen, dass das Minimum der Gummibandlänge auf halber Höhe ist.

Dieses Thema hat ein hohes fachdidaktisches Potential, d. h. viele wertvolle, in neuerer Zeit von der Fachdidaktik immer wieder geforderte Charakteristika aufzuweisen. Wir geben im Folgenden eine kurze stichwortartige Zusammenfassung einiger Punkte:

- Die Fragestellungen haben durchaus Realitätsbezug und sind als Modellierungsaufgabe auch im Regelunterricht gut geeignet, insbesondere in Technischen Gymnasien.

- Das Ausmaß der Hilfestellung kann gut dosiert werden, die Aufgabe ist also nicht von der Sorte: entweder alles oder nichts verraten.

- Ausgehend von einem konkreten (nicht allzu schwierig nachzubauenden) Phänomen kann hier prozessorientiert substanzielle Mathematik betrieben werden.

- Das Thema bietet eine gute Gelegenheit für Vernetzungsmöglichkeiten: Geometrie, Trigonometrie, Funktionen, Differentialrechnung, Grenzwerte, Ungleichungen, Begründungen, etc.

- Neue Medien (CAS) kommen zu einem sinnvollen Einsatz: Zeichnen von Graphen, (näherungsweises) Lösen von Gleichungen, etc.

- Die Fragen bzw. Themen A, B, C müssen nicht alle behandelt werden, sie können auch einzeln relativ unabhängig voneinander gestellt und bearbeitet werden. Das mathematische Niveau bei C ist sehr flexibel.

- Das wichtige funktionale Denken wird gefordert und gefördert:
  A: Die Riemenlänge in Abhängigkeit von R, r, d
  B: Die Höhe in Abhängigkeit des angestrebten Übersetzungsverhältnisses
  C: Riemenlänge in Abhängigkeit der Höhe

Literatur

Busse, A. (2009). Umgang Jugendlicher mit dem Sachkontext realitätsbezogener Mathematikaufgaben. Ergebnisse einer empirischen Studie. Franzbecker, Hildesheim.