Stefan-Harald KAUFMANN, Köln

Schülerauffassungen von Variablen in der analytischen Geometrie

Im Unterricht der linearen Algebra und analytischen Geometrie bearbeiten Schülerinnen und Schüler häufig geometrisch motivierte Probleme mit Hilfe von Objekten, die durch algebraische Gleichungen beschrieben werden. Variablen können in solchen Gleichungen unterschiedliche Funktionen einnehmen bzw. unterschiedlich interpretiert werden. In der Regel werden bei derartigen Gleichungen bestimmte Eigenschaften bzw. Aspekte von Variablen fokussiert, vgl. dazu beispielsweise Malle (Malle, 1993).

1. Forschungsprojekt

In dem hier vorgestellten Forschungsprojekt sollen die Variablenauffassungen, die Schülerinnen und Schüler bei der Arbeit mit algebraischen Gleichungen im Unterricht der linearen Algebra und analytischen Geometrie entwickeln, untersucht werden. Ein Schwerpunkt des Forschungsprojekts ist die Analyse des Zusammenhangs von Variablenauffassungen und den Vorstellungen der mit Hilfe der Variablen beschriebenen Objekte.

Außer einer fachwissenschaftlichen und stoffdidaktischen Analyse bildet die Auswertung von Schülerinterviews zu ausgewählten Objekten der analytischen Geometrie den Schwerpunkt. Diese Auswertung wird auf der Basis der Grounded Theory (Glaser, 2005) realisiert. Die Interviews wurden im Januar 2010 an der Universität zu Köln durchgeführt und beinhalten Fragen zu Vektoren, Geraden und verschiedenen Typen von Geradengleichungen.

2. Schülerinterviews

Der Beitrag konzentriert sich auf erste Ergebnisse aus den Interviews zu Zusammenhängen von Variablenauffassungen und geometrischen Objekten. Diese sollen hier an zwei Fallbeispielen zur geometrischen Interpretation einer Geradengleichung in Vektorform konkretisiert werden. Eine ähnliche Untersuchung zu speziell dieser Frage wurde von Wittmann (Wittmann, 1999) bereits durchgeführt. Bei den Ergebnissen lassen sich einige Übereinstimmungen erkennen. Es können aber auch weitere Aspekte ergänzt werden.

Im Interview wurden allen Schülerinnen und Schülern insgesamt sieben vorher festgelegte Fragen gestellt. Exemplarisch wird hier eine dieser Fragen beschrieben. Dabei wurde den Schülerinnen bzw. Schülern eine Karte mit der Aufschrift

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

vorgelegt. Anschließend stellte der Interviewer die folgende Frage: „Ich habe hier eine Geradengleichung. Kannst Du erklären woraus sie sich zusammensetzt."

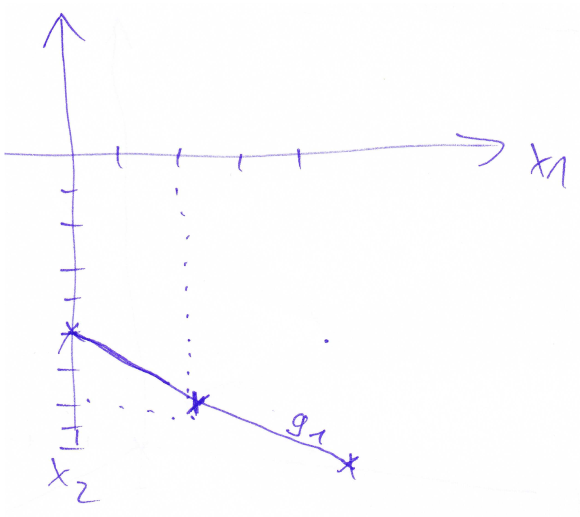
Die Antworten der Lernenden sind zum Teil sehr unterschiedlich, lassen aber bereits Zusammenhänge zwischen Variablenauffassung und den Vorstellungen zu den beschrieben Objekten erkennen. Dies soll im Folgenden mit Hilfe von zwei Fallbeispielen verdeutlicht werden.

3. Fallbeispiel Mathias

Mathias beantwortet die oben beschriebene Frage, indem er zunächst die einzelnen Komponenten der Gleichung zu erklären versucht. Im Laufe des Gesprächs bemerkt er, dass er dabei große Schwierigkeiten hat, bricht ab und setzt nochmal neu an mit dem wesentlichen Unterschied, dass er seine Antwort an einer Grafik erläutert:

Also wir hatten hier unsern äh so unsern äh so Ortsvektor gesetzt. Das der Ort, der uns den Ursprung gibt.
(*Skaliert die senkrechte Achse und zeichnet auf dieser einen Punkt ein.*)
Und dann mit dem mit ne Verschiebung von vier Einheiten in x-Ebene und vier Einheiten in äh x eins Ebene und vier Einheiten in x zwei Ebene dann.
(*Skaliert die waagerechte Achse und läuft anschließend vom Startpunkt aus 4 Einheiten in x_1-Richtung und -4 Einheiten in x_2-Richtung. Den Endpunkt dieses Wegs markiert er mit einem Punkt.*)
Dann wären wir ungefähr bei, drei eins zwei drei vier. Dann wären wir ungefähr hier. So sähe dann in etwa unsere Gerade aus.
(*Verbindet die beiden Punkte durch eine Strecke.*)
Ausgehend von beiden Vektoren dann.

Dazu zeichnet Mathias die folgende Grafik:



Mathias identifiziert den Ortsvektor als einen Punkt (Z. 165-167) und den Richtungsvektor als eine Verschiebung (Z. 167), die als Strecke realisiert wird. Die Strecke ist für Mathias gleichzeitig die Gerade (Z. 177/178.). In dem gesamten Interview realisiert Mathias die Gerade ausschließlich über den Ortsvektor und den Richtungsvektor, wie er selbst am Ende in Zeile 179 nochmals erklärt. Die Variable λ wird von ihm anscheinend nicht wahrgenommen oder zumindest äußert er zu keinem Zeitpunkt, dass sie eine Bedeutung für die Beschreibung der Geraden besitzt. Das mag eine Erklärung dafür sein, dass die Gerade aus seiner Sicht begrenzt zu sein scheint bzw. eine Strecke ist.

4. Fallbeispiel Felix

03:06 F: Ähm. Wir haben zuerst einen Stützvektor, der uns vom
(Zeigt auf den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.)
Nullpunkt aus zu auf die Gerade führt.
Dann einen Richtungsvektor, der uns eben sacht, in
(Zeigt auf den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.)
welche Richtung die Gerade verläuft und einen
Vorfaktor vom Richtungsvektor,
(Zeigt auf λ.)
der das Ganze zu einer Geraden macht, weil ja der Rich-
tungsvektor nur eine bestimmten Punkt anzeigen wür-
de, aber auf diese Weise halt in jede beliebige Richtung
auf dieser Geraden; kann halt der Punkt verschoben wer-
den, der auf der Geraden eben liegt und dann dargestellt
wird.

Felix erklärt zuerst die Bedeutung des Stützvektors (Z. 57-59) und des Richtungsvektors (Z. 60-62) für die Gerade. Anschließend geht er auf die

Bedeutung des Vorfaktors λ ein. Felix geht dabei auf zwei entscheidende Aspekte ein: Die Notwendigkeit dieses Vorfaktors und dessen Funktionsweise. Der Vorfaktor ist seiner Aussage nach notwendig, da andernfalls nur ein Punkt der Geraden und nicht die gesamte Gerade dargestellt wird (Z. 65-67). Die Begründung liefert er direkt danach durch seine Erklärung der Funktionsweise. Der Punkt, den Stützvektor und Richtungsvektor ohne den Vorfaktor anzeigen (Z. 66), kann mit Hilfe des Vorfaktors auf der Geraden verschoben werden. Hier lässt sich erkennen, dass Felix die Gleichung funktional interpretiert. Leider gibt er keine exakte Auskunft darüber wie er das exakt realisiert. Weitere Informationen über die Vorstellung von Felix konnten aus der Antwort auf diese Frage nicht gewonnen werden, so würde etwa interessieren ob er sich für den Vorfaktor eine Zahl denkt, die den durch den Stützvektor dargestellten Punkt entlang der Gerade auf einen anderen Punkt verschiebt oder ob er sich eine Zahl denkt, diese dann verändert und dadurch die Position des Punktes auf der Geraden verändert. Zu Beantwortung dieser und ähnlicher Fragestellungen sind weitere Auswertungen der Interviews erforderlich.

5. Schluss

Die beiden Beispiele demonstrieren, dass ein gewisser Zusammenhang zwischen Variablenvorstellung und Objektvorstellung erkennbar ist. Im Fall Mathias wird deutlich, dass eine Interpretation einer Geradengleichung in Vektorform ohne die entscheidende Variableneigenschaft zu Fehlvorstellungen des beschrieben Objektes führen kann. Im Fall Felix führt die Interpretation der Variablenfunktion zu einer tragfähigen Geradenvorstellung. Um Felix Variablenauffassung besser einordnen zu können, müssen bei einer genaueren Untersuchung weitere Aspekte, wie beispielsweise Felix Vorstellung eines Vektors mit einbezogen werden. Das Ziel ist dann, die Variablenvorstellung in bereits bestehende Konzepte für Funktionsvariablen (z. B. Malle, 1993, S.263-266), einzuordnen.

Literatur

Malle, Günther (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Glaser, B.G./Strauss, A.L. (2005). *Grounded Theory*, 2. Auflage. Bern: Huber.

Wittmann, G. (1999). Schülerkonzepte zur geometrischen Deutung der Parametergleichung einer Geraden. *Mathematica Didactica* 22 (1) (S. 23-37).