Ladislav KVASZ, Prag; Rainer KAENDERS, Köln

Mathematisches Bewusstsein

Was ist die Lösung der Gleichung $3x^2 - 54x + 243 = 0$? Ist es 9? Was bedeutet es, sich der Lösung bewusst zu sein? Hat man dies vom Mitschüler erfahren? Wurde das Ergebnis durch Anwendung der pq-Formel bestimmt? Oder mit einer Wertetabelle? Betrachtet man den Graphen der Funktion mit Hilfe eines graphikfähigen Taschenrechners? Oder löst man die Aufgabe sogar mit einem Computer-Algebra-System? Führt man eine quadratische Ergänzung durch? Ist einem klar, dass 9 die einzige Lösung sein muss, da es die x-Koordinate des Scheitelpunktes des Graphen der Funktion $f(x) = 3x^2 - 54x + 243$ ist? Oder hat man sich vergegenwärtigt, dass f und f' eine gemeinsame Nullstelle haben? Schaut man sich die kritischen Stellen der reellen Funktion $f(x) = x^3 - 27x^2 + 243x$ an? Man könnte sich fragen, wann ein Feuerwerkskörper, der beinahe vertikal mit einer Steigung von 5400 Prozent und einer Geschwindigkeit von 69,048 m/s in den Himmel geschossen wird, seinen höchsten Punkt erreicht.

In dem Moment, in dem ein Kind geboren wird, wird mit diesem auch die Keimzelle eines persönlichen mathematischen Kosmos in die Welt gesetzt, der fortan zu expandieren beginnt. Doch ein Apfel wächst nicht ausschließlich – er verändert auch seinen Geschmack. Wenn alles gut geht: von sauer zu süß. Ebenso hat der persönliche mathematische Kosmos eines Menschen eine Qualität, die auf seine *Reife* hindeutet. Dies ist eine Qualität dessen, was wir *mathematisches Bewusstsein* (mathematical awareness) nennen.

1. Hintergrund

Warum eine solche Begrifflichkeit? Sie erlaubt, die unterschiedlichen Charakteristika mathematischen Bewusstseins zwischen diagrammatisch und symbolisch, zwischen intuitiver und formaler Herangehensweise und letztlich zwischen Komplexität und Vereinfachung zu unterscheiden.

Wie kann Tiefe im Umgang mit Mathematik konzeptualisiert werden? Nicht wenige Mathematiker sind der Ansicht, dass so etwas wie Tiefe im Umgang mit Mathematik durch den Grad der *mathematischen Strenge* charakterisiert wird. Auch außerhalb der Mathematik ist es eine weit verbreitete Auffassung, dass das Erlernen von Mathematik gleichzusetzen wäre mit einer stets fortschreitenden formalen Präzisierung. Doch aktive Mathematik kennt viele Niveaus von Strenge und guer Unterricht sollte sie alle beachten (vgl. Freudenthal 1971, S.427 oder Polya, 1954). Eher heuristische Herangehensweisen und Tätigkeiten von geringerer Genauigkeit, wie das Zeichnen von Graphen, numerische Annäherung, das Experimentieren von

Hand oder mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen bzw. dynamischer Geometriesoftware liefern einen wertvollen Beitrag zur mathematischen Auseinandersetzung – auch wenn sie nicht den höchsten Standards mathematischer Strenge genügen.

Nachdem die mathematische Strenge in der New-Math Zeit sehr stark betont wurde, haben sich die Vorstellungen über Inhalte und Formen der Darstellung mathematischer Inhalte stark verändert: Mathematisches Wissen jeder Qualität – sei es das Ergebnis einer Berechnung, sei es am Graphen abgelesen, sei es durch Computersoftware zustande gekommen oder sei es das Ergebnis einer strengen Argumentation, wird als Bewusstsein gleichwertiger Qualität akzeptiert (vgl. Kaenders 2009). Statt über Qualitäten von Exaktheit wird auf der Ebene von *Kompetenzen* differenziert. Dabei wird die mathematische Tiefe an der Komplexität des praktischen Problems bemessen, mit welchem die/der Lernende sich möglicherweise eines Tages konfrontiert sehen könnte. Doch Inhalte können ganz unterschiedlich bearbeitet werden – vom Hersagen geeigneter Wörter bis zu tiefem Verständnis – und alle Arten von Aufgaben können entweder durch Nachahmung oder aber durch originelle eigene Ideen gelöst werden.

Es ist in unseren Augen fruchtbarer, das Wechselspiel zwischen plausiblen und demonstrativen mathematischen Denkweisen in den Blick zu nehmen (vgl. Polya,1957). Dazu kommt, dass *mathematisches Verhalten* beschrieben werden kann (Freudenthal,1991, S.122). Auch die Beschreibung verschiedener *Niveaustufen des Denkens*, wie sie von Pierre van Hiele (1986) geleistet wurde, bietet eine aufschlussreiche Perspektive auf die Tiefe mathematischen Bewusstseins. In einzelnen Teildisziplinen haben weitere Autoren Versuche unternommen, eine Qualität der Auseinandersetzung mit Mathematik zu beschreiben. So hat Arcavi (1994) das Konzept des *symbol sense* als Erweiterung von *number sense* (Sowder, 1989) eingeführt. In der Geometrie hat Hewitt (2001) *geometrical awareness* beschrieben.

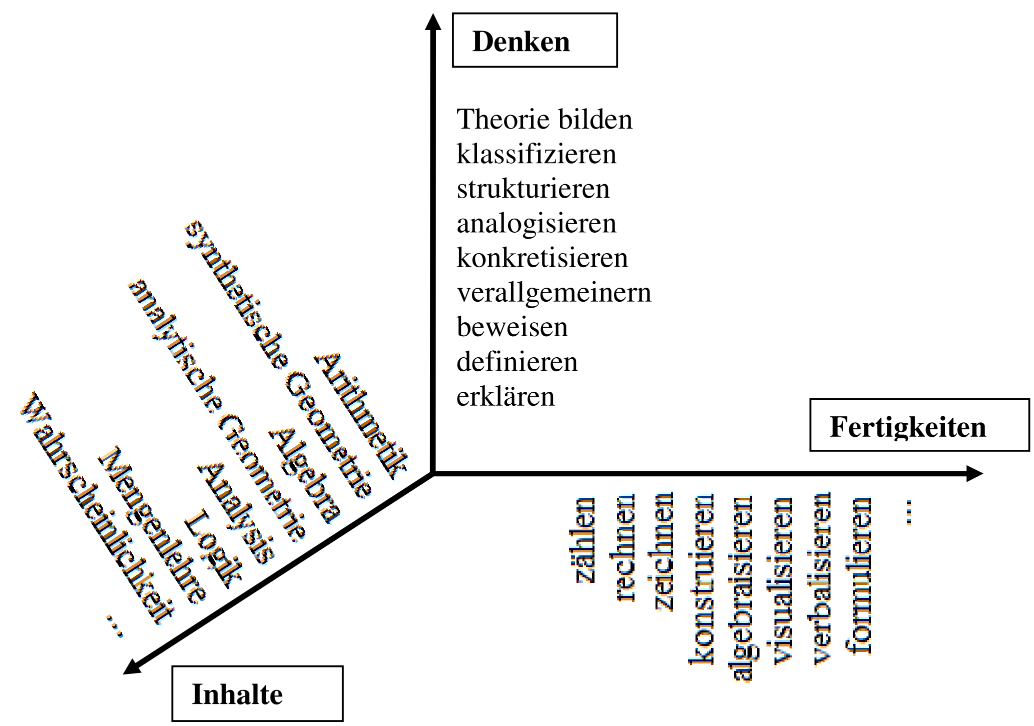
Um auszudrücken, was es bedeutet, Mathematik gelernt zu haben, scheint ein Ansatz notwendig, der diese Ansätze zusammenbringt.

2. Mathematisches Bewusstsein

Grundlage unseres Ansatzes ist der Ausspruch Caleb Gattegnos (1987): „Only awareness is educable in Man“, auf den sich sowohl van Hiele als auch Hewitt beziehen. Mathematiklernen begreifen wir nicht nur als Erweiterung sondern auch als Veränderung des mathematischen Kosmos (siehe Abbildung), d.h. Veränderung der Qualität des *mathematischen Bewusstseins* (im Sinne von *awareness* im Gegensatz zu *consciousness*).

Der Kosmos selbst wird in drei grundliegende Dimensionen zerlegt: Inhalte, Denkaktivitäten und Werzeugkompetenz (skills). In der Reihenfolge der Inhalte haben wir uns an historischen Entwicklungen und an der wachsenden Komplexität syntaktischer Regeln der mathematischen Sprache orientiert (Kvasz 2008). Im Unterschied zu Kompetenzmodellen unterscheiden wir zwischen der Dimension der Werkzeugkompetenz (skills, Fertigkeiten) und der Dimension der Denkaktivitäten. Fertigkeiten, bzw. Werkzeugkompetenzen können *geübt* werden. Das Erlernen solcher Werkzeugkompetenzen erfolgt am effektivsten in entsprechenden inhaltlichen Kontexten, wie z.B. zählen in Arithmetik und Zeichnen in synthetischer Geometrie etc. Gleichwohl ist es uns wichtig, Werkzeugkompetenz von den mathematischen Denkaktivitäten und vom inhaltlichen Kontext zu lösen. So kann man zum Beipiel nicht nur in der Artithmetik addieren sondern auch Intervalle, Polynome, Vektoren, Funktionen etc. können addiert werden.

Alle die genannten Denkaktivitäten beziehen Anwendungen oder Modellierungen nicht explizt ein, denn es gibt kein angewandtes oder auf Modellierung bezogenes mathematisches Denken. Gleichwohl kann eine praktische Problemstellung natürlich Motivation sein, bestimmte mathematische Denkaktivitäten in Gang zu setzen.



Mathematisches Bewusstsein, also die Qualität dieses Kosmos, muss ein *ganzheitliches Konzept*, d.h. thematisch neutral sein, so dass Transfer möglich ist. Ähnlich wie mathematische Strenge kennt auch mathematisches Bewusstsein verschiedene Graduierungen. Da wir die Entwicklung der Mathematik selbst als ein lingustisches Phänomen verstehen (Kvasz, 2008), sehen wir wie Van Hiele (1986, S. 109), dass auch die Qualität mathematischen Bewusstseins notwendigerweise eine linguistisch wahrnehmbares Phänomen darstellt.

Wir unterscheiden soziales, imitatives, manipulatives, instrumentelles, diagrammatisches, experimentelles, strategisches, kontextbezogenes, intuitives, argumentatives, logisches, theoretisches Bewusstsein. Mathematisches Bewusstsein ist eine adverbiale Konstruktion – es beschreibt die *Art und Weise*, wie wir etwas wissen und in der Lage sind mathematische Denkaktivitäten mit Hilfe bestimmter Fertigkeiten und Werkzeuge durchzuführen.

So kann z.B. jemand *diagrammatisch* in der A*rithmetik* durch *Addieren beweisen*, dass die Summe zweier ungerader Zahlen gerade ist: , wie die Pythagoräer dies taten.

Für eine ausführlichere Darstellung vgl. Kaenders & Kvasz (2010).

Literatur

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea, *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435.

Freudenthal, H. (1991). *Revisting Mathematics Education, China Lectures*. Doordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gattegno, C. (1987). The Science of Education Part 1: Theoretical Considerations. *Educational Solutions*, New York, Restricted Printing.

Hewitt, D. (2001). Arbitary and Necessary: Part 3 Educating Awareness. *For the Learning of Mathematics*, 21 (2).

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight*. Orlando: Academic Press.

Kaenders, R. & Kvasz, L. (2010). Mathematisches Bewusstsein. Eingereicht in: Lengnink, K. & Nickel, G. & Wille R. (Hrsg.) *Mathematik verstehen – philosophische und didaktische Perspektiven*, Siegen, 2010.

Kaenders, R. (2009). Von Wiskunde und Windmühlen – über den Mathematikunterricht in den Niederlanden. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Münster: WTM Verlag.

Kvasz, L. (2008). *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Birkhäuser Verlag.

Polya, G. (1954). *Induction and Analogy in Mathematics* (Vol. 1) und *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. 2). Princeton/New Jersey: Princeton University Press.

Sowder, J. & Schapelle B.P. (Hrsg.) (1989). *Establishing foundations for research on number sense and related topics: report of a conference*. Center for Research in Mathematics and Science Education, College of Sciences, San Diego State University.