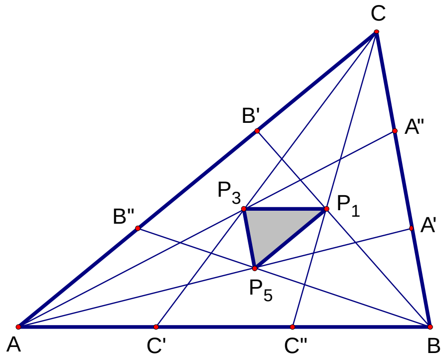
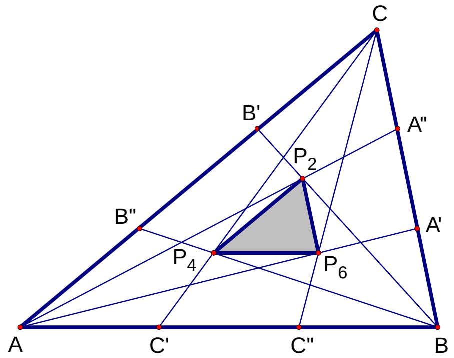
INGMAR LEHMANN, Berlin

Entdeckungen im Innern eines Dreiecks – Schnittfiguren mit überraschenden Invarianten

Dank Dynamischer Geometriesoftware (DGS) und Zugmodus lassen sich in der Schule Vermutungen aufstellen und erhärten. Eine falsche Vermutung wird durch den Zugmodus erledigt. Eine richtige Vermutung wird durch den Zugmodus zwar erhärtet; die Einsicht in die Beweisnotwendigkeit wird dagegen eher erschwert. Die folgenden Sätze habe ich (mit Ausnahme der Sätze 3 und 5) selbst entdeckt. Auch wenn ich später feststellen musste, dass einige davon längst publiziert worden sind, bleibt die schöne Erfahrung, es selbst vermutet (und bewiesen) zu haben.

Satz 1: Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, so entstehen im Innern zwei Dreiecke $\Delta P_1P_3P_5$ und $\Delta P_2P_4P_6$.

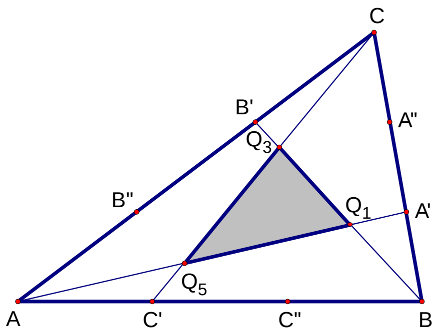


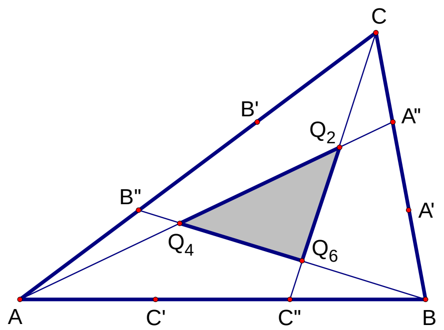


Für das Verhältnis der Umfänge und Flächeninhalte gilt dann
$u_{\Delta ABC} : u_{\Delta P_1P_3P_5} = 5$, $u_{\Delta ABC} : u_{\Delta P_2P_4P_6} = 4$, $A_{\Delta ABC} : A_{\Delta P_1P_3P_5} = 25$, $A_{\Delta ABC} : A_{\Delta P_2P_4P_6} = 16$.

Ist das Dreieck ΔABC gleichseitig, sind dies auch die (zueinander ähnlichen) Dreiecke $\Delta P_1P_3P_5$ und $\Delta P_2P_4P_6$, ohne kongruent zu sein.

Satz 2: Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunk-





ten, so entstehen im Innern zwei Dreiecke $\Delta Q_1Q_3Q_5$ und $\Delta Q_2Q_4Q_6$.

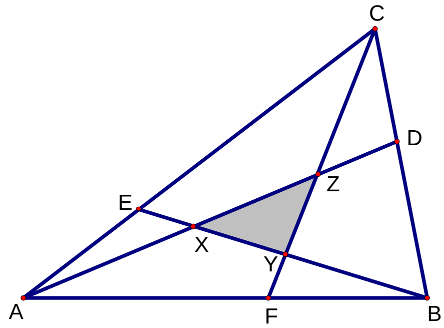
Dann gilt für diese Dreiecke $A_{\Delta ABC} : A_{\Delta Q_1Q_3Q_5} = A_{\Delta ABC} : A_{\Delta Q_2Q_4Q_6} = 7$.

Ist das Dreieck ΔABC gleichseitig, sind dies auch die Dreiecke $\Delta Q_1Q_3Q_5$ und $\Delta Q_2Q_4Q_6$ (und zueinander kongruent).

Satz 3 (*Satz von Routh*): Für die Seiten eines Dreiecks ΔABC, die durch die drei Transversalen AD, BE und CF geteilt werden, seien die Teilverhältnisse $AF : FB = r$, $BD : DC = s$ und $CE : EA = t$.

Verbindet man die entsprechenden Schnittpunkte dieser Transversalen, entsteht im Innern ein Dreieck ΔXYZ und es gilt

$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta XYZ}} = \frac{(rs+r+1)(rt+t+1)(st+s+1)}{(rst-1)^2}.$$

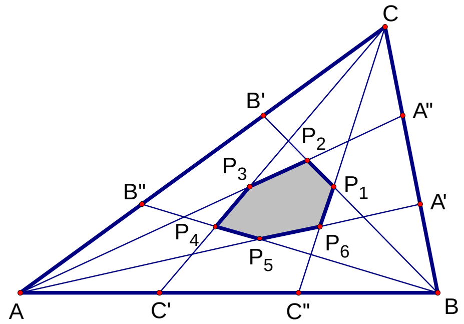


Wie Satz 2 ist auch der *Satz von Ceva* ein Spezialfall von Satz 3.

Satz 4 (*Satz von Walter*): Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt.

Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, entsteht im Innern ein Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ – kurz: P-Sechseck.

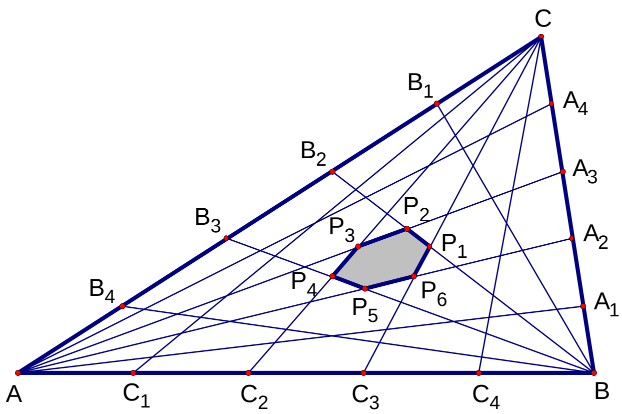
Dann gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{P-\text{Sechseck}}} = 10$.



Ist das Dreieck ΔABC gleichseitig, ist das P-Sechseck zwar gleichseitig, aber nicht gleichwinklig. Benachbarte bzw. gegenüberliegende Winkel ergänzen sich jeweils zu 240°.

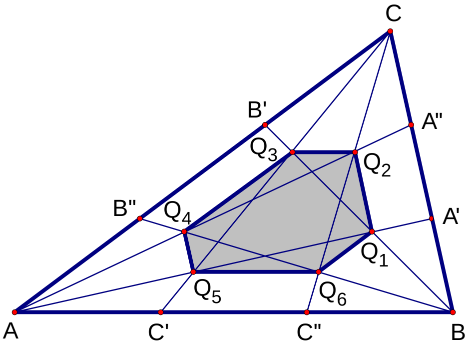
Ryan Morgan, ein Schüler der 10. Jahrgangsstufe in den USA, verallgemeinerte 1994 diesen *Satz von Walter*.

Satz 5 (*Satz von Morgan*):
Werden die Seiten eines Dreiecks ΔABC in n gleiche Teile geteilt, wobei n eine ungerade Zahl sei, und jeder dieser Teilungspunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbunden, entsteht im Innern ein P-Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ (siehe Abb. für $n = 5$).



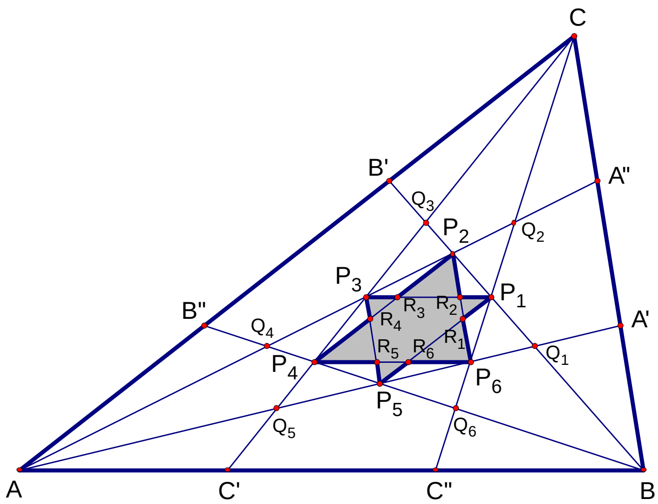
Dann gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{P-\text{Sechseck}}} = \frac{(3n+1)(3n-1)}{8}$.

Satz 6: Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, entsteht im Innern ein Q-Sechseck $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ mit zueinander parallelen Gegenseiten $Q_2Q_3 \parallel Q_5Q_6 \parallel AB$; analog gelten $Q_1Q_6 \parallel Q_3Q_4 \parallel AC$ und $Q_1Q_2 \parallel Q_4Q_5 \parallel BC$. Für das Verhältnis der Umfänge und Flächeninhalte gilt $\frac{u_{\Delta ABC}}{u_{Q-\text{Sechseck}}} = \frac{7}{3}$ bzw. $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{Q-\text{Sechseck}}} = \frac{49}{13}$.



Ist das Dreieck ΔABC gleichseitig, ist das Q-Sechseck gleichwinklig.

Satz 7: Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten und darüber hinaus die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 miteinander, entsteht im Innern ein P-Sechsstern $P_1R_2P_2R_3P_3R_4P_4R_5P_5R_6P_6R_1$; dieser P-Sechsstern ist ein nichtkonvexes unregelmäßiges Zwölfeck mit zueinander parallelen Gegenseiten $P_1P_3 \parallel P_4P_6 \parallel AB$, $P_2P_4 \parallel P_1P_5 \parallel AC$ und $P_2P_6 \parallel P_3P_5 \parallel BC$.

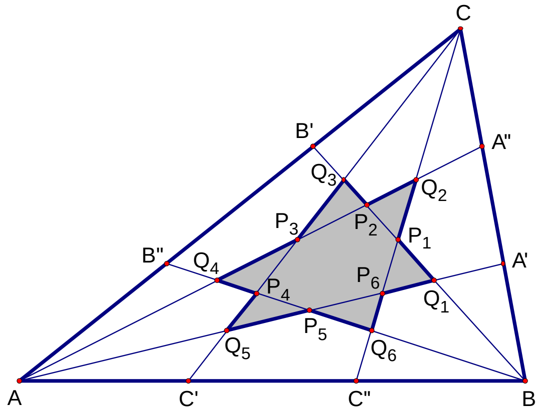


Für das Verhältnis der Umfänge und Flächeninhalte gilt $\frac{u_{\Delta ABC}}{u_{P\text{-Sechsstern}}} = \frac{10}{3}$ bzw. $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{P\text{-Sechsstern}}} = \frac{100}{7}$. Im Fall, dass das Dreieck ΔABC gleichseitig ist, besteht der P-Sechsstern aus den beiden (nichtkongruenten) gleichseitigen Dreiecken $\Delta P_1P_3P_5$ und $\Delta P_2P_4P_6$.

Satz 8: Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, so entsteht im Innern ein Q-Sechsstern $Q_1P_1Q_2P_2Q_3P_3Q_4P_4Q_5P_5Q_6P_6$; dieser Q-Sechsstern ist ein nichtkonvexes unregelmäßiges Zwölfeck.

Dann gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{Q\text{-Sechsstern}}} = \frac{70}{13}$.

Im Fall, dass das Dreieck ΔABC gleichseitig ist, ist der Q-Sechsstern zwar nicht gleichseitig, aber zu jeder Seite gibt es eine gleichlange Nachbarseite.



Fazit

Dreiecksgeometrie – mit oder ohne DGS – ist ein „weites Feld“. Mit DGS können Schüler selbstständig auf Entdeckungsreise gehen. Dank Zugmodus lassen sich Vermutungen aufstellen, widerlegen oder erhärten. Die hier betrachteten Sätze beschränken sich auf Dreiecke mit wohlbestimmten Transversalen. Schwächere Schüler können anstelle eines beliebigen Ausgangsdreiecks ein gleichseitiges Dreieck wählen. Nachdem Strecken, Winkel, Umfänge und Flächeninhalte gemessen worden sind, erweisen sich einige Verhältnisse als konstant. In manchen Fällen ist diese Konstante wahrscheinlich ein gerundeter Wert. Wie soll man „erraten“, was sich hinter diesem Näherungswert verbirgt? Hinter 2,65 kann sich zum einen $\sqrt{7}$, zum anderen aber auch $\frac{130}{49}$ “verstecken“. Oder ist der Wert korrekt und steht für $\frac{53}{20}$? Da hilft nur „Papier und Bleistift“, um den geometrischen Hintergrund tiefer auszuleuchten. Hier ist der Lehrer gefordert – zumal das Bedürfnis, etwas beweisen zu sollen, per DGS nicht gefördert wird.

Literatur

Coxeter, H. S. M. (1963). *Unvergängliche Geometrie*. Basel: Birkhäuser.

Cuoco, A., Goldenberg, P., Mark, J. (1993). Marion's Theorem (Reader Reflections). *Mathematics Teacher 86/8*, 619.

Dörrie, H. (1943). *Mathematische Miniaturen*. Breslau: Hirt.

Sielaff, K.; Usbeck, F. W. (1994). *Hamburger Schülerzirkel Mathematik 1991-93*. Hamburg: Hereus.

Steinhaus, H. (1959). *Kaleidoskop der Mathematik*. Berlin: DVW.

Watanabe, T.; Hanson, R.; Nowosielski, F. D. (1996). Morgan’s Theorem. *Mathematics Teacher 89/5*, 420-423.