Brigitte Leneke, Magdeburg

Graphentheorie im MU – Von Knoten, kürzesten Wegen und Gerüsten

1. Einleitung

Überall dort, wo netzartige Strukturen (Computernetze, Versorgungsnetze, Verkehrsnetze, wirtschaftliche Verflechtungsbeziehungen) zu analysieren und zu bearbeiten sind, finden „Graphen“ als Modelle Anwendung. Alltägliche Probleme, z. B. pünktliches Abfahren von Bahnen und Bussen, schnelles Herstellen von Telefon- und Internetverbindungen, Senken der Kosten für die Müllabfuhr, Finden einer möglichst kurzen Autoroute und vieles mehr können mit mathematischen Instrumentarien der Graphentheorie dargestellt, bearbeitet und gelöst werden. Schon diese Themen für sich genommen sind für die Lernenden interessant und motivierend und die Fragestellungen spontan verständlich. Aus ihrem eigenen Umfeld können sie weitere ähnliche Problemstellungen beschreiben.

Einige typische Fragestellungen

- Fünf Orte (vgl. Abb. 1) sind durch ein Straßennetz verbunden. Diese Verbindungen haben verschiedene Wertungen. Welche Wege führen von V_1 nach V_5 und welcher davon ist der kürzeste (längste)?
- Kann man von einem beliebigen Ort losfahren, alle anderen Orte genau einmal besuchen und zum Ausgangspunkt zurückfahren?
- Fünf Stationen A, B, C, D und E sind durch ein System von Versorgungsleitungen (Gas, Telefon, Wasser) so miteinander verbunden, dass jede Station mit jeder verbunden ist (vgl. Abb. 2). Um eine Neuverlegung kostengünstiger zu gestalten, wird überlegt, sie mit kleinster Anzahl von Leitungen nur untereinander zu verbinden. Welche Möglichkeiten gibt es?
- Jede Leitung hat seinen Preis. Welches Leitungsnetz ist das kostengünstigste?

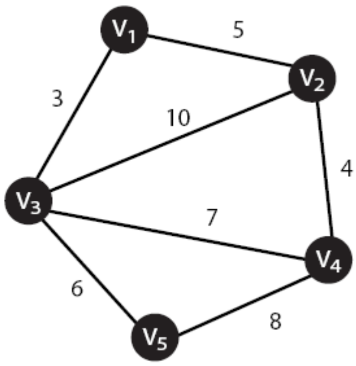

Abb. 1

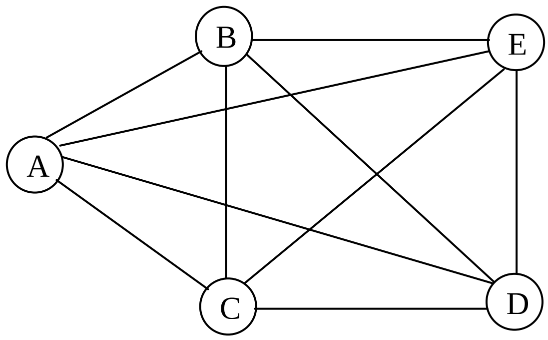

Abb. 2

2. Didaktisch-methodische Orientierung

Die **Modellbildung** steht bei jeder Problemlösung im Mittelpunkt. Zunächst werden in Verbindung mit den hervorragenden Visualisierungsmöglichkeiten einige notwendige Begriffe eingeführt, die dann durch die Bearbeitung typischer graphentheoretischer Fragestellungen ausgehend von praktischen Problemstellungen gefestigt werden. Die genutzten Lösungsverfahren haben algorithmischen und auch heuristischen Charakter. Sie können sowohl für die Untersuchung von Existenzproblemen, als auch von Anzahl- bzw. Optimierungsproblemen (vgl. Abb. 3) ausgewählt werden. So kann den Lernenden u. a. am Beispiel des „Kürzesten – Wege – Problems " dies über das Finden **eines** „Weges" vom Ort A zum Ort B, über das Suchen nach **weiteren** Wegen bis zum „Herausfiltern" des **„besten"** Weges sehr anschaulich verdeutlicht werden

Problemkreise	Ziele des MU
Existenzprobleme	Argumentieren, Begründen, Beweisen
Anzahlprobleme	Argumentieren, Kombinatorik
Optimierungsprobleme	Heuristisches und algorithmisches Arbeiten

Abb. 3

Die Lernenden können spielerisch-experimentell Rundreisen realisieren und gestalten, intuitiv-heuristisch die kürzeste Rundreise finden, aber z. B. auch algorithmisch „Gerüste" auf Graphen konstruieren. Dabei entdecken sie, dass es „leichte" und „schwere" Probleme gibt und vervollständigen so ihr Bild von der Mathematik. In Abb. 4 sind weitere unterrichtlichen Potenzen zusammenfassend dargestellt:

Begriffssystem aufbauen	
Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler	
Entdeckendes Lernen	Umgang mit offenen Aufgaben
Experimentelles Arbeiten	Inner- und außermathematische Vernetzungen
Anwendungsorientierung	Methode der Aufgabenvariation
Modellierung	Kooperatives Arbeiten
Heuristisches und algorithmisches Arbeiten	Visuelles Arbeiten

Abb. 4

3. Zur Behandlung von Grundbegriffen

Die Einführung und Festigung von grundlegenden Begriffen der Graphentheorie sollte schrittweise anhand konkreter Problemstellungen erfolgen. Weniger ist hier sicher mehr! Durch kleinere und übersichtliche Aufgaben können die Lernenden mit Knoten, Kanten, gerichteten und ungerichteten Graphen, Wegen und Bäumen, Teilgraphen und Gerüsten …bekannt gemacht werden. Es ist maßgeblich von der Unterrichtssequenz abhängig, wie breit und tief der zur Verfügung stehende Begriffsapparat werden sollte. Die Palette ist groß!!

In einem ersten Teil einer Unterrichtssequenz könnte eine Konzentration auf die Einführung der Begriffe Graph, Knoten, Kanten und Wege erfolgen. Ausgangspunkt ist eine sehr anschauliche Situation. Es werden die Begriffe „Graph“, „Knoten“ und „Kante“, „gerichteter Graph“, „bewerteter Graph“ erarbeitet. Dabei sollen anhand des Beispiels eines Straßennetzes einer Stadt und wesentlicher Institutionen (Schule, Einkaufszentrum, Stadtpark, Krankenhaus) die Äquivalente in der Graphentheorie gefunden werden. Weitere Begriffe, wie z. B. Weg, Rundweg, zusammenhängend, Baum könnten dann folgen.

4. Kürzeste Wege, Rundreisen und Gerüste

Die Suche nach kürzesten Wegen in Graphen, nach Rundreisen und kürzesten Rundreisen sowie nach Minimalgerüsten eröffnet im Unterricht die Möglichkeit, sowohl heuristische als auch algorithmische (wenn überhaupt möglich) Lösungsvarianten und –strategien einzubeziehen. In offenen Aufgabenstellungen tritt Offenheit auch bei der Wahl der Lösungsmethoden zu Tage.

Beispiel :

a) Erstelle für deinen eigenen Wohnkreis einen Graphen mit mindestens fünf Knoten, die für die umliegenden Orte stehen.

b) Recherchiere die Entfernungen zwischen den Orten und bewerte die Kanten deines Graphen entsprechend.

c) Finde den jeweils kürzesten Weg von deinem Wohnort zu allen anderen Orten.

Eingebettet in solche und ähnliche Aufgabenstellungen könnte z. B. die Idee des Dijkstra-Algorithmus angewendet werden.

Im Unterschied dazu ist die Lösung eines „Rundreiseproblems“ etwas anders zu realisieren. Hier treten heuristische Vorgehensweisen in den Vordergrund. In einem vollständigen Graphen mit 7 Knoten gibt es 360 Rundreisen (Existenz- und Anzahlproblem)! Die Lernenden erkennen die Schwierigkeit: einfach Durchprobieren dauert zu lange und ist bei größerem n kaum möglich. Ausgangsproblemstellung kann z. B. die Auslieferung von Gütern per Lastwagen in n Städte und die Rückkehr ins Depot sein. Hinsichtlich der Modellierung kann von einem vollständigen Graphen ausgegangen werden: Jede Stadt ist von jeder anderen direkt erreichbar.

Die Lernenden erkennen sehr schnell, dass die Vorgehensweise, immer von einem Ort ausgehend die nächstgelegene Stadt zu besuchen, nicht immer zum besten Ergebnis führt und sie suchen automatisch nach anderen Wegen, noch kürzere Rundreisen zu finden. Dem gegenüber kann das Finden eines Minimalgerüstes wieder algorithmisch, z. B. mit dem Algorithmus nach Kruskal gelöst werden. Für die algorithmische Umsetzung finden die Lernenden die Idee des Algorithmus relativ selbstständig:

Die Kanten in der Reihenfolge aufsteigender Kantengewichte durchlaufen und jede Kante wählen, die mit allen zuvor gewählten Kanten keinen Kreis schließt. Dabei werden alle Knoten erreicht. Alle übrigen Kanten werden entfernt. Es entsteht ein minimal spannender Baum.

Anhand weiterer praktischer Problemstellungen (z. B. Energieverbundnetz einer Region) können die Lernenden zunächst den jeweiligen Graphen konstruieren (Modellierung), ein Gerüst bestimmen (Existenzproblem), verschiedene Gerüste bestimmen (Anzahlproblem) und dann das Minimalgerüst ermitteln (Optimierungsproblem).

Literatur

Leneke, B. (2005). *Einführung in die Graphentheorie – mit Graphen kürzeste Wege finden.* 42 RAAbits. Stuttgart: RAABE Fachverlag für die Schule.