Céline LIEDMANN, Dortmund

Modellieren in europäischen Schulen

Einleitung

Das Comenius Projekt „Developing Quality in Mathematics Education II“ (DQME II) ist ein Netzwerk aus elf europäischen Ländern. Sein wesentliches Merkmal ist die Vernetzung von Theorie und Praxis, die durch die Partnerinstitutionen (Universitäten, Lehrerfortbildungsinstitutionen und Schulen) gewährleistet wird. Im Zentrum des Aufgabenfeldes steht das Entwickeln und Modifizieren von Modellierungs- und realitätsnahen Aufgaben.

Hintergrund und Intention

Die erstrebenswerte Vernetzung zwischen Mathematik und Realität ist keine neue Erkenntnis. PISA (2003) orientierte die Testkonzeption des mathematischen Schwerpunktgebiets unter dem Ansatz einer „realistischen Mathematik“ wie sie auch schon 1977 von Freudenthal aufgestellt wurde (vgl. Freudenthal, 1977). In ähnlicher Form findet sich dieser Bezug in der Grundorientierung an den Winter´schen Grunderfahrungen in vielen Kernlehrplänen in Deutschland wieder. Leider zeigt sich jedoch, dass das „Modellieren auch für *Lehrer* schwer ist, der Unterricht […] komplexer und weniger vorhersagbar [zu werden scheint]“ (Blum, 2007, S. 3). Hier setzt DQME II durch seine internationale und praxisorientierte Ausrichtung an. Die Grundintention des Projekts ist es „gute“ realitätsnahe Aufgaben und Modellierungsaufgaben in den europäischen Mathematikunterricht zu implementieren.

Entwicklung, Modifizierung und Umsetzung von Aufgaben

Im Folgenden werden zwei Aufgaben und deren Entwicklungsprozesse vorgestellt, eine davon ist die Swimming-Pool Aufgabe.

> Wegen des eher kalten Wetters im Winter sind kleine Garten-Pools in Schweden sehr beliebt. Stell Dir einen Pool vor, der rund ist und einen Radius von 2,75m hat, sowie eine Tiefe von 1,18m. Die Entfernung der Wasseroberfläche und des Poolrandes beträgt 0,06m. Jeden Frühling wird der Pool durch zwei Rohre mit Wasser gefüllt. Jedes dieser Rohre bringt 20l Wasser pro Minute in den Pool. Das Wasser kostet 2 Euro pro Kubikmeter.
>
> Fragen:
>
> - Wie viel Wasser passt in den Pool? (Beantworte die Frage in Kubikmetern!)
> - Wie teuer ist es, den Pool zu füllen?
> - Wie lange dauert es, bis der Pool voll ist?
> - Wie viele Menschen können gleichzeitig in dem Pool schwimmen, bevor das Wasser überschwappt? Finde das mittlere Volumen einer mittleren Person selbst.

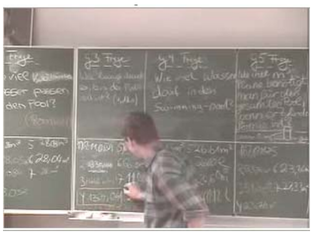
Abb. 1: Swimming Pool Aufgabe (Matte Direkt Grade 9, 2003, p. 53)

Die Aufgabe stammt aus dem schwedischen Mathematikbuch „Matte Direkt“ für die Jahrgangsstufe 9. Die Arbeitsaufträge sind sehr klar und detailliert formuliert. Es wird auch ein Hinweis zur Bearbeitung gegeben - „Beantworte die Frage in Kubikmetern!“. Die Aufgabe wurde nach Deutschland geschickt, wo ein Projektlehrer sie öffnete und gleichzeitig eine Unterrichtsmethode dazu entwickelte.

Wegen des eher kalten Wetters sind im Winter kleine Gartenpools in Schweden sehr beliebt. Stell Dir einen Pool vor, der rund ist und einen Radius von 2,75m hat, sowie eine Tiefe von 1,18m. Die Entfernung zwischen der Wasseroberfläche und dem Poolrand beträgt 0,06m. Der Pool wird durch zwei Rohre mit Wasser gefüllt. Jedes dieser Rohre bringt 20l Wasser pro Minute in den Pool. Das Wasser kostet 2 Euro pro Kubikmeter.

- Denkt euch zwei (möglichst originelle) mathematische Fragestellungen zu dem Text aus und beantwortet diese mit einer Rechnung.
- Einigt euch auf eine Frage in der Gruppe, die ihr an die Tafel schreiben wollt.
- Löst die Fragen der anderen Gruppen und schreibt eure Lösung unter die entsprechende Frage.

Abb. 2: Modifizierte Swimming Pool Aufgabe (J.H. Müller)



Der Lehrer zeichnet eine Matrix an die Tafel, und jede Schülergruppe schreibt ihre Frage in ein Feld der Matrix. Danach versucht jede Gruppe alle Fragen zu beantworten und schreibt ihre Lösung jeweils unter die entsprechende Frage (s. Abb.3).

Abb. 3: Tafelbild der Matrix

Hier ein paar Beispielfragen, die von den Schülern selbst entwickelt und anschließend bearbeitet wurden:

- Wie teuer ist es, wenn man den Pool komplett mit Wasser füllt?
- Wie viel Wasser passt in den Pool?
- Wie lange dauert es bis der Pool voll ist?
- Wie viel Wasser darf man in den Pool füllen?
- Wie viel Folie braucht man, um den Pool herzustellen?
- Wie teuer ist es, 170 l in den Pool zu füllen?
- Wie lange dauert es den Pool zu reinigen, wenn eine Pumpe 17,5 l pro Stunde pumpen kann?

Es wird deutlich, dass Schüler durchaus in der Lage sind sich mathematisch sinnvolle Fragen zu überlegen. In den Gruppengesprächen fanden rege Diskussionen über den Schwierigkeitsgrad der Fragen statt. Verworfen wurden häufig Fragen, die der eigenen Gruppe zu schwer oder zu einfach waren.

Deutlich sichtbar war die Motivation seitens der Schüler, die nach ihren eigenen Aussagen auf den selbstentwickelten Fragen beruhte. In einigen Fällen konnten Diskussionen über nicht präzise formulierte Fragen beobachtet werden. Die Frage „Wie viel Folie braucht man für den Pool?“ warf das Missverständnis zwischen Abdeckfolie und Folie für die Herstellung des Pools auf. Eine solche Diskussion führte zu zwei Erkenntnissen: Erstens wurde den Schülern bewusst, dass sie auf eine präzise Fragestellung achten müssen. Zweitens, dass unterschiedliche Lösungen nicht gleich bedeuten müssen, dass nur eine Lösung mathematisch sinnvoll ist. Es kann z.B. auf unterschiedliche Auffassungen der Aufgabenstellung zurückzuführen sein. Die Bedeutung des Validierens und Reflektierens der Ergebnisse lässt sich auf Grund solcher Situationen besonders gut thematisieren. Dieser Aspekt des Validierens und Reflektierens ist ein zentraler Aspekt des Modellierens und wird besonders durch die vom Lehrer eingeworfene Frage „Wie viele Menschen können in dem Pool stehen, bevor er überläuft?“ behandelt.

Die im Folgenden vorgestellte Aufgabe stammt aus der Kategorie „Experimente im Mathematikunterricht“. Die Aufgabenidee stammt aus einem ungarischen Schulbuch und wurde zunächst in folgender Form in Deutschland eingesetzt:

Die Schnur

Begründe, ob und wenn ja, um wie viel Meter man das waagerecht gehaltene 3 Meter lange Seil verlängern muss, damit der Schüler auf dem 50cm hohen Stuhl darunter passt. Begründe, ob die Verlängerung des Seils von der Position des Stuhls zwischen den Schülern abhängig ist.

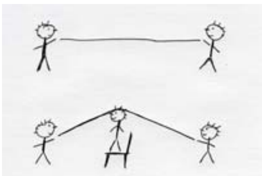
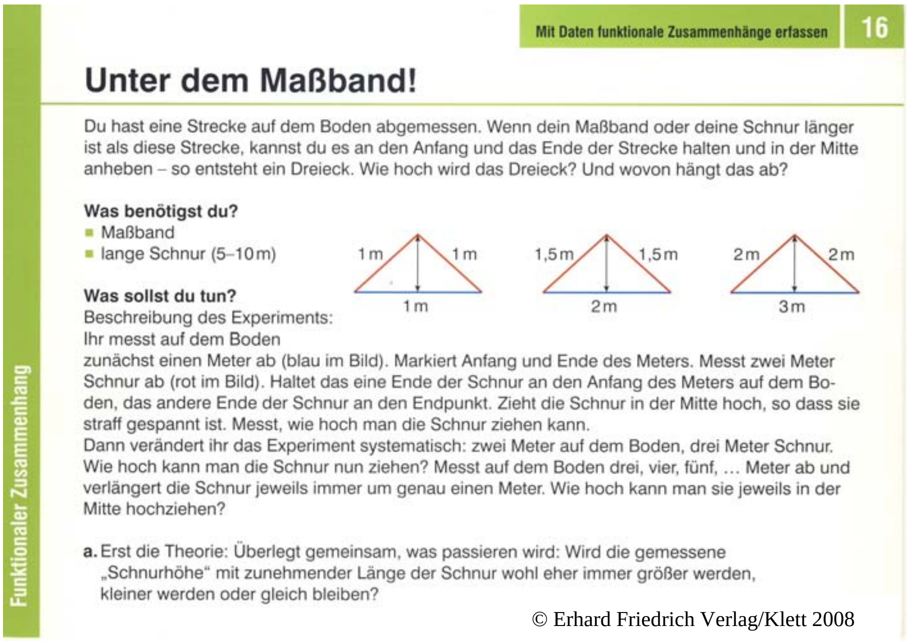


Abb. 4: Die Schnuraufgabe (J.H. Müller)

Im Rahmen des Mathekoffers (Müller, 2008) wurde die Aufgabe aufgegriffen und weiterentwickelt. Die Aufgabe bringt nicht nur Schüler, sondern auch Lehrer zum Staunen, denn die Vermutung wird nach mathematischer Prüfung in den meisten Fällen verworfen.

Hierbei handelt es sich um eine in unserem Projekt anerkannte Modellierungsaufgabe, auch wenn sie nicht der Definition von Modellierungsaufgaben nach Gabriele Kaiser entspricht. „Dabei geht es um die Lösung realer und authentischer Probleme, die kaum vereinfacht sind, und deren Bearbeitung zu einem besseren Verständnis der Realität beitragen soll.“(Kaiser und

Borromeo Ferri, 2006) Sie legt besonderen Wert darauf, dass die Aufgaben authentisch wirken und die Schüler nicht an dem Bezug zum alltäglichen Leben zweifeln.



Mit Daten funktionale Zusammenhänge erfassen 16

Funktionaler Zusammenhang

Unter dem Maßband!

Du hast eine Strecke auf dem Boden abgemessen. Wenn dein Maßband oder deine Schnur länger ist als diese Strecke, kannst du es an den Anfang und das Ende der Strecke halten und in der Mitte anheben – so entsteht ein Dreieck. Wie hoch wird das Dreieck? Und wovon hängt das ab?

Was benötigst du?

- Maßband
- lange Schnur (5–10 m)

Was sollst du tun?

Beschreibung des Experiments:
Ihr messt auf dem Boden zunächst einen Meter ab (blau im Bild). Markiert Anfang und Ende des Meters. Messt zwei Meter Schnur ab (rot im Bild). Haltet das eine Ende der Schnur an den Anfang des Meters auf dem Boden, das andere Ende der Schnur an den Endpunkt. Zieht die Schnur in der Mitte hoch, so dass sie straff gespannt ist. Messt, wie hoch man die Schnur ziehen kann.
Dann verändert ihr das Experiment systematisch: zwei Meter auf dem Boden, drei Meter Schnur. Wie hoch kann man die Schnur nun ziehen? Messt auf dem Boden drei, vier, fünf, … Meter ab und verlängert die Schnur jeweils immer um genau einen Meter. Wie hoch kann man sie jeweils in der Mitte hochziehen?

a. Erst die Theorie: Überlegt gemeinsam, was passieren wird: Wird die gemessene „Schnurhöhe“ mit zunehmender Länge der Schnur wohl eher immer größer werden, kleiner werden oder gleich bleiben?

Abb. 5: Mathekofferkarte *Unter dem Maßband*

In der obigen Aufgabe ist der Alltagsbezug zwar nicht erkennbar, aber das Experiment an sich ist in der Realität ausführbar und stellt somit die „Reale Situation“ beim Modellieren dar. Auf Grund der Vielfalt der kulturellen Einflüsse in unserem Projekt ist der Begriff des Modellierens sehr weit gefasst. Nach Erprobung dieser Aufgabe kam es auf dem DQME II-Meeting in Schweden zu einer Reihe von neuen Anregungen, die Jan Hendrik Müller aufnahm und seine Aufgabe modifizierte (s. Aufgabe *Unter dem Seil* unter www.dqme2.eu).

Literatur

Blum, W. (2007): Mathematisches Modellieren- zu schwer für die Schüler und Lehrer? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*, Hildesheim: Franzbecker, S. 3-12.

Borromeo Ferri, R. und Kaiser, G. (2006): Perspektiven zur Modellierung im Mathematikunterricht - Analysen aktueller Ansätze. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006*. Hildesheim: Franzbecker, S. 50-52.

Freudenthal, H. (1977): *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Bd. 1, Stuttgart: Klett.

Müller, J. H. (2008). Themenbox: Funktionaler Zusammenhang. In: *Mathekoffer* (Hrsg.) Büchter, A. und Henn, H.-W.. Hannover: Friedrich und Stuttgart: Klett.

Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., u.a. (2004): *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs.* Münster: Waxmann.

Winter, H. (1996): Mathematikunterricht u. Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* S.35-41.