

Michael LINK, Dortmund

## **Kinder beschreiben operative Zahlenmuster – ein Forschungs- und Entwicklungsprojekt**

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich der KMK wird u. a. gefordert, dass Kinder zum Ende der Grundschulzeit „Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern [...] erkennen, beschreiben und fortsetzen“ können sollten (KMK, 2004). In den vergangenen zwei Jahrzehnten wurde eine Vielzahl von strukturierten Übungen für den Mathematikunterricht der Grundschule entwickelt, die – neben der Förderung inhaltsbezogener Kompetenzen – explizit auch das Erkennen, Beschreiben und Begründen von Zahlenmustern ermöglichen (Wittmann & Müller, 1990, 1992; Steinweg, 2003).

Wenn Kinder erstmalig dazu aufgefordert werden, Muster in strukturierten Übungen zu beschreiben, muss mit Antworten wie den folgenden gerechnet werden:

$21+70=91$	<i>Was fällt dir auf?</i>
$32+60=92$	– Dass da immer 91, 92, 93, 94 steht
$43+50=93$	– Es war immer 10. und 1. Wechsel
$54+40=94$	– Immer +10

Diese Aufgabe und die drei Schülerantworten stammen aus einer Voruntersuchung des hier vorgestellten Dissertationsprojekts. Sie zeigen exemplarisch, dass Kinder auch ohne vorherige unterrichtliche Behandlung einen intuitiven Zugang zu Zahlenmustern finden und zumindest Teilaspekte des Musters in ihre schriftliche Beschreibung integrieren. Die Beispiele zeigen aber auch, dass die Beschreibungen der Kinder in vielen Fällen noch verbesserbar sind, sei es hinsichtlich der vollständigen Erfassung des mathematischen Musters der Aufgabe oder sei es hinsichtlich der sprachlichen Präzision der Formulierungen. Gerade wenn angestrebt wird, dass die Kinder nachfolgend auch eine Begründung für das Muster formulieren, indem die einzelnen Aspekte des Musters miteinander verknüpft werden, ist es notwendig, dass das Muster in allen für die Begründung wesentlichen Aspekten und mit hinreichender Genauigkeit erfasst wird.

Ein Ziel des Projekts war es nun, ausgehend von ersten informellen Vorgehensweisen von Kindern beim Beschreiben von Zahlenmustern Unterrichtsaktivitäten zu entwickeln, die die Kinder dazu anregen sollen, Zahlenmuster verständlich(er) und präzise(r) und unter zunehmender Verwendung der mathematischen Fachsprache zu beschreiben. Inhaltlich konnte

dabei an Vorarbeiten v. a. von Steinweg (z. B. 2001, 2003) und Verboom (2007) angeknüpft werden, die in ihren Publikationen sowohl Beispiele für Beschreibungen von Kindern zu Zahlenmustern erläutern als auch Vorschläge zur Arbeit mit Beschreibungen von Zahlenmustern im Unterricht machen.

### **Konzeptioneller Rahmen: Design Research**

Der Ablauf und die Zielsetzungen des Projekts orientierten sich an einem Forschungskonzept, das in den letzten Jahren unter dem Oberbegriff *Design Research* diskutiert wurde (z. B. van den Akker et al., 2006; sowie die Sonderausgabe der Zeitschrift *Educational Researcher*, 2003). Grob umrissen sieht dieses Konzept eine enge Verschränkung von Forschung und Entwicklung bei gleichzeitiger Verfolgung sowohl praktischer Ziele (z. B. Entwicklung von praxistauglichen Lernmaterialien) als auch theoretischer Ziele (z. B. Erforschung der Wirksamkeit von Lernmaterialien und deren Bedingungen, u. a. mit dem Ziel einer fortlaufenden Verbesserung der Materialien) vor. Van den Akker et al. (2006, S. 5) beschreiben den spezifischen Ansatz von Design Research mit folgenden Merkmalen:

„[D]esign research may be characterized as

- Interventionist: the research aims at designing an intervention in the real world;
- Iterative: the research incorporates a cyclic approach of design, evaluation, and revision;
- Process oriented: a black box model of input-output measurement is avoided, the focus is on understanding and improving interventions;
- Utility oriented: the merit of a design is measured, in part, by its practicability for users in real contexts; and
- Theory oriented: the design is (at least partly) based upon theoretical propositions, and field testing of the design contributes to theory building.“

Mit der angestrebten parallelen Verfolgung praktischer und theoretischer Ziele, die in den genannten Merkmalen zum Ausdruck kommt, verspricht Design Research ein Modell zu sein für die von Stokes beschriebene sowohl von praktischen Nutzenerwartungen wie auch von theoretischem Erkenntnisinteresse bestimmte Forschungsarbeit, die er in seinem Quadrantenmodell wissenschaftlicher Forschung in dem nach Louis Pasteur benannten Quadranten verortet (Stokes, 1997). Diese Verschränkung von Forschung und Entwicklung steht auch im Einklang mit Wittmanns Verständnis einer „Mathematikdidaktik als ‚design science‘“ (1992), das der

Entwicklung von Lernumgebungen und der Verbesserung des Unterrichts eine zentrale Rolle für die Mathematikdidaktik zukommen lässt.

Besonders hervorhebenswert ist m. E. das zweite von van den Akker et al. genannte Merkmal für Design Research: Die zyklische Vorgehensweise im Forschungs- und Entwicklungsprozess. Interventionen werden in einem mehrfach zu durchlaufenden Prozess (weiter-)entwickelt, evaluiert und überarbeitet, mit dem Ziel einer zunehmenden Verbesserung des Entwicklungsprodukts. Beispiel für ein Projekt, das diese zyklische Vorgehensweise umsetzt, ist die Arbeit von Swan (2006).

### **Überblick über die Phasen des Dissertationsprojekts**

Auch das Dissertationsprojekt, das hier vorgestellt wird, folgt der für Design Research charakteristischen zyklischen Vorgehensweise. Im Folgenden werden die verschiedenen Phasen des Projekts kurz skizziert.

In zwei Voruntersuchungen wurden 170 Kindern aus dritten Klassen schriftliche Standortbestimmungen vorgelegt, in denen diese Muster in operativ strukturierten Übungen (Schöne Päckchen bzw. Entdeckerpäckchen, Zahlenmauern, Zahlenketten, Aufgabenpärchen) fortsetzen und beschreiben sollten. Zusätzlich wurden mit 11 Kindern klinische Interviews zu den Aufgaben und ihren Bearbeitungen durchgeführt. Ziel dieser Voruntersuchungen war es, herauszufinden, wie Kinder vor einer intensiveren unterrichtlichen Behandlung des Themas operative Zahlenmuster beschreiben. Vor dem Hintergrund der Ergebnisse der Voruntersuchungen wurden erste Ideen für Aufgaben zur vertieften Auseinandersetzung mit Beschreibungen von Zahlenmustern im Mathematikunterricht entworfen.

Zwei dieser Aufgabenentwürfe konnten im Rahmen von klinischen Interviews mit 6 Kindern erprobt werden. Die Erfahrungen aus den Interviews flossen ein in die Erstellung einer kurzen, fünf Unterrichtsstunden umfassenden Sequenz zum Beschreiben von Zahlenmustern, die in Zusammenarbeit mit zwei Lehrerinnen in zwei dritten Grundschulklassen erprobt werden konnte. Zusätzlich wurde zu Beginn und am Ende der Unterrichtssequenz eine schriftliche Standortbestimmung durchgeführt. Die einzelnen Unterrichtsstunden bzw. Aufgabenentwürfe wurden hinsichtlich der mit ihnen verbundenen Zielsetzungen evaluiert. Zu diesem Zweck wurden alle Unterrichtsstunden videographiert, außerdem wurden sämtliche Schülerdokumente archiviert und ausgewertet.

Die Auswertung dieser ersten unterrichtlichen Erprobung resultierte in einer Überarbeitung der Unterrichtssequenz und der darin eingesetzten Aufgaben. Die überarbeitete Sequenz konnte dann im Rahmen einer zweiten, umfangreicheren Erprobung in 7 dritten Klassen und einer vierten Klasse

eingesetzt werden. Die in der Unterrichtssequenz eingesetzten Aufgaben wurden den beteiligten Lehrkräften in einer zweistündigen Lehrerfortbildung vor der Erprobung vorgestellt. Danach führten die Lehrkräfte die Unterrichtssequenz in Eigenregie durch. Nach Abschluss der Sequenz wurde mit allen Lehrkräften ein Abschlussgespräch zu ihren Erfahrungen mit den eingesetzten Aufgabenvorschlägen geführt und wieder alle Schülerdokumente aller beteiligten Kinder zu Auswertungszwecken archiviert. Die dabei gewonnenen Daten stellen die Grundlage für eine abschließende Evaluation der im Projekt entwickelten Unterrichtsvorschläge zur Arbeit mit und an Beschreibungen von operativen Zahlenmustern im Mathematikunterricht dar.

Aus Platzgründen kann an dieser Stelle nicht detaillierter auf einzelne im Projekt entstandene Aufgabenvorschläge eingegangen werden. In den Unterlagen zu einer Lehrerfortbildung, die frei im Internet zugänglich sind (Link, 2008), können einige Aufgaben aber eingesehen werden.

## Literatur

- Educational Researcher. (2003). Vol. 32, Nr. 1: *Theme Issue: The Role of Design in Educational Research*.
- KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. München, Neuwied: Wolters-Kluwer.
- Link, M. (2008). „Zahlenmuster beschreiben – zwischen individuellen Ausdrucksweisen und normierter Fachsprache“. Abgerufen am 26.03.2010 unter: <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/mathe2000/pdf/Symp18/link.pdf>
- Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Münster: Lit Verlag.
- Steinweg, A. S. (2003). Gut, wenn es etwas zu entdecken gibt – Zur Attraktivität von Zahlen und Mustern. In S. Ruwisch, S. & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. (S. 56-74). Offenburg: Mildenerger.
- Stokes, Donald. E. (1997). *Pasteur's Quadrant. Basic Science and Technological Innovation*. Washington, D. C.: Brookings Institution Press.
- Swan, M. (2006). *Collaborative learning in mathematics: A challenge to our beliefs and practices*. London: NIACE and NRDC.
- Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKinney, S. & Nieveen, N. (2006). Introducing educational design research. In Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKinney, S. & Nieveen, N. (eds.), *Educational Design Research*. (S. 3-7). New York: Routledge.
- Verboom, L. (2007). „Mir fällt auf: Du hast die 1 krumm geschrieben!“ In Rathgeb-Schnierer, E. & Roos, U. (Hrsg.), *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht*. (S. 167-178). München: Oldenbourg.
- Wittmann, E. Ch. (1992). Mathematikdidaktik als ‚design science‘. *Journal für Mathematikdidaktik*, 13, S. 55-70.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1990, 1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1 / Band 2*. Leipzig: Klett.