

Miriam LÜKEN, Hannover

Ohne „Struktursinn“ kein erfolgreiches Mathematiklernen – Ergebnisse einer empirischen Studie zur Bedeutung von Mustern und Strukturen am Schulanfang

In der mathematikdidaktischen Literatur wird das Erkennen von Mustern und Strukturen häufig in einen Zusammenhang mit mathematischer Leistung gebracht. So wird leistungsstarken Kindern ein kompetenter Umgang mit Mustern und Strukturen zu-, Kindern mit Schwierigkeiten beim Rechnen hingegen eine Fähigkeit zur Strukturerkennung und Strukturnutzung abgesprochen (vgl. z.B. Wittmann & Müller 2007; Schipper 2002). Analysen nationaler und internationaler Literatur zeigen jedoch, dass dieser vielfach postulierte Zusammenhang empirisch nicht nachgewiesen wurde.

In der in diesem Beitrag beschriebenen und am Schulanfang verorteten Studie wurde daher folgenden Fragen nachgegangen: Gibt es einen empirisch nachweisbaren Zusammenhang zwischen mathematischen Kompetenzen und Fähigkeiten bzgl. Mustern und Strukturen am Schulanfang? Worin unterscheiden sich Erstklässler beim Umgehen mit Mustern und Strukturen? Welche Fähigkeiten bringen Schulanfänger überhaupt mit? Neben dem in diesem Beitrag dargestellten quantitativen Teil wurden insbesondere auch die Lösungswege, Erklärungen und Strategien näher betrachtet, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den kindlichen Muster- und Strukturfähigkeiten transparent zu machen.

Unter einem **Muster** soll das geordnete Ganze, jegliche räumliche oder numerische Regelmäßigkeit verstanden werden. Die Art und Weise, in der das Ganze gegliedert ist, die Beziehung zwischen den verschiedenen Bestandteilen, sei die **Struktur** des Musters.

Instrumente und Methoden

Für die Studie wurden mehrere Aufgaben entwickelt, in denen die Kinder auf verschiedene Weisen Muster und Strukturen erfassen, nutzen, reproduzieren und selbst produzieren, sowie Muster fortsetzen sollten. Die Aufgabenformate waren dabei stark an Anforderungen aus dem mathematischen Anfangsunterricht angebunden. In Form eines halbstandardisierten Einzelinterviews wurden mit diesen Muster- & Strukturaufgaben die Fähigkeiten von 74 Schulanfängern bzgl. Mustern und Strukturen in den ersten sieben Wochen nach der Einschulung erhoben. Bereits vor den Sommerferien war mit den Kindern im Kindergarten der „Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung“ (OTZ; van Luit, van de Rijt & Hasemann 2001) durchgeführt worden. Nach zwei Jahren, am Ende des 2. Schuljahres, wurde die mathe-

matische Leistung derselben Kinder mit dem „Deutschen Mathematiktest für 2. Klassen“ erhoben (DEMAT 2+; Krajewski, Liehm & Schneider 2004). Die Antworten und Lösungen der Muster- & Strukturaufgaben wurden zunächst quantitativ ausgewertet. In einem zweiten Schritt wurden die kindlichen Sichtweisen und Strategien quartilweise mit qualitativen Analysemethoden näher ausgewertet und miteinander verglichen. Letztere Auswertungen können im Rahmen dieses Beitrags nicht ausführlich beschrieben werden, die Ergebnisse fließen jedoch in die Überlegungen zum Struktursinn mit ein.

Ergebnisse

Korrelationsanalysen ergeben einen mittelhohen, hochsignifikanten Zusammenhang zwischen der Zahlbegriffsentwicklung (OTZ) und den Fähigkeiten bzgl. Mustern und Strukturen (gemessen mit den Muster- & Strukturaufgaben) am Schulanfang von $r = 0,61$. Teilt man den OTZ inhaltlich in zwei Teile, so korreliert der Teil zum Mengenwissen ($r = 0,53$) niedriger mit den Muster- und Strukturfähigkeiten als der Teil zum Zahlenwissen ($r = 0,60$). Die Rechenleistung am Ende der 2. Klasse (DEMAT 2+) korreliert mit $r = 0,57$ ebenfalls hochsignifikant in einem ähnlichen Größenbereich mit den Muster- & Strukturaufgaben. Die Tabelle gibt diese Zusammenhänge sowie jeweils die niedrigste und höchste Korrelation der Muster- & Strukturaufgaben mit den Subtests von OTZ und DEMAT 2+ wieder.

Muster- & Strukturaufgaben	
OTZ (gesamt)	0,61**
Σ Mengenwissen	0,53**
Σ Zahlenwissen	0,60**
<i>Subtest „Vergleichen“</i>	0,29*
<i>Subtest „Zahlwörter benutzen“</i>	0,52**
DEMAT 2+ (gesamt)	0,57**
<i>Subtest „Längenvergleich“</i>	0,31*
<i>Subtest „Halbieren“</i>	0,47**

Tabelle 1: Korrelationen zwischen den Muster- & Strukturaufgaben und der mathematischen Leistung, gemessen mit dem Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ) sowie dem Deutschen Mathematiktest für 2. Klassen (DEMAT 2+); *signifikant **hochsignifikant

Unter der Annahme, dass Fähigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen am Schulanfang das weitere Mathematiklernen beeinflussen, kann

mit Hilfe von linearen Regressionsanalysen die Qualität der Muster- & Strukturaufgaben als Prädiktor für die Rechenleistung Ende Klasse 2 (DEMAT 2+) überprüft werden. Es zeigt sich, dass 31 % der Varianz in den Mathematikleistungen des zweiten Schuljahres durch Muster- und Strukturfähigkeiten bereits am Schulanfang vorhergesagt werden können (*korr.* $R^2 = 0,31$; $p < .01$). Zum Vergleich: Der OTZ (an derselben Stichprobe erhoben) erklärt mit 34 % nur wenig mehr der Unterschiede im DEMAT 2+ (*korr.* $R^2 = 0,34$; $p < .01$). Auch Krajewski (2003) oder Dornheim (2008), die die besondere Bedeutung des Zahlenvorwissens für das weitere Mathematiklernen betonen, liegen mit der Varianzaufklärung ihrer Aufgaben in einem ähnlichen Größenbereich (zwischen 35 % und 38 %). Eine multiple Regressionsanalyse bestätigt den Einfluss von Muster- und Strukturkompetenzen auf das Rechnenlernen. Gemeinsam erklären die Muster- & Strukturaufgaben *und* die Leistung im OTZ 43 % der Varianz im DEMAT 2+ (*korr.* $R^2 = 0,43$; $p < .01$), wobei die standardisierten Beta-Koeffizienten, deren Wert als relative Wichtigkeit der Variablen für die Vorhersage interpretiert werden können, zeigen, dass der OTZ (Beta = .41) zwar mehr, aber eben nur wenig mehr als die Muster- & Strukturaufgaben (Beta = .36) zur Vorhersage der Leistung im DEMAT 2+ beiträgt.

Vorliegende Studie kann damit den in der mathematikdidaktischen Literatur postulierten Zusammenhang zwischen mathematischer Leistung und Fähigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen auf einem mittelhohen Niveau bestätigen. Darüber hinaus weist sie auf die Bedeutung nicht-numerischer, eher bereichsunspezifischer Kompetenzen für mathematisches Lernen hin. Das Wissen über Zahlen mag zwar die wichtigste Vorläuferfertigkeit für die mathematische Entwicklung sein, es gibt aber weitere Basiskompetenzen – wie eben ein kompetenter Umgang mit Mustern und Strukturen – die von essentieller Bedeutung sind. Aus diesen Ergebnissen, den Befunden der qualitativen Auswertung, sowie Ergebnissen anderer Studien zu kindlichen Strukturierungsfähigkeiten muss die Schlussfolgerung gezogen werden:

Wir besitzen einen „Struktursinn“!

Struktursinn bezeichnet, in Anlehnung an den Begriff des Zahlensinns, die Leichtigkeit und Beweglichkeit im Umgang mit Mustern und Strukturen. Der englische Begriff des „structure sense“ wurde von Linchevski & Livneh (1999) in einem Artikel geprägt, in dem sie Schwierigkeiten von Schülern mit der Nutzung von Wissen über arithmetische Strukturen beim Algebralernen beschreiben. Hoch & Dreyfus (2004) entwickelten die Idee des Struktursinns weiter und übertrugen ihn auf die High School Algebra. Der Begriff wird nun für die frühe mathematische Entwicklung adaptiert – es

handelt sich also sozusagen um einen „early structure sense“ – und ein erster Versuch gestartet, das Konstrukt Struktursinn mit Inhalt zu füllen. Das Umgehen mit Mustern und Strukturen erfordert eine Vielzahl von Fähigkeiten, bezogen auf die frühe mathematische Entwicklung umfassen diese:

- das Wiedererkennen einer Anordnung als bereits bekanntes Muster oder Struktur (z.B. Würfelbilder, Fingermuster, ...), insbesondere das Wiedererkennen eines bekannten Musters in seiner einfachsten Form und als Teil einer komplexeren Anordnung;
- das Aufteilen eines Musters in Teile (Struktureinheiten);
- das Erkennen wechselseitiger Verbindungen, Beziehungen und Zusammenhänge zwischen den Struktureinheiten (z.B. Finden von Regelmäßigkeiten, Entdecken von Ähnlichkeiten / Unterschieden, ...);
- das Integrieren der Struktureinheiten und Betrachten des Musters als Ganzes (z.B. um seine Mächtigkeit zu bestimmen, es fortzusetzen, ...).

Die Ergebnisse vorliegender Studie zeigen die besondere Bedeutung von Muster- und Strukturkompetenzen für das frühe Mathematiklernen. Das Konstrukt des Struktursinns mit seiner ersten inhaltlichen Ausdifferenzierung erforderlicher Fähigkeiten kann dabei als nützlicher Rahmen für weitere Forschung und didaktische Konsequenzen dienen.

Literatur

- Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten*. Berlin: Logos.
- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in High School Algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Hrsg.), *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 49 - 56). Bergen, Norway: PME.
- Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule*. Hamburg: Kovač.
- Krajewski, K., Liehm, S. & Schneider, W. (2004). *DEMAT 2+. Deutscher Mathematiktest für zweite Klassen. Manual*. Göttingen: Beltz.
- Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173 - 196.
- Schipper, W. (2002). Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. *JMD* 23(3/4), 243 - 261.
- van Luit, J., van de Rijt, B. & Hasemann, K. (2001). *OTZ. Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung. Manual*. Göttingen: Hogrefe.
- Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther et al. (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42 - 65). Berlin: Cornelsen Verlag.