MICHAEL MARXER, GERALD WITTMANN, Schwäbisch Gmünd

Förderung des Zahlenblicks bei gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen

Dass Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht der Sekundarstufe tragfähige Grundvorstellungen zu gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen erwerben sollen, ist mittlerweile Konsens. Doch welche Bedeutung besitzt das *Rechnen* mit gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen? Die zentrale Antwort lautet: Es bildet den Anlass, dass Schülerinnen und Schüler Eigenschaften der für sie neuen Zahlen entdecken und verstehen können.

1. Zahlenblick – Beispiel, Begriffsklärung, Erläuterung

Schülerinnen und Schüler sollen Aufgaben mit gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen nicht stets entsprechend den bekannten kalkülhaften Verfahren rechnen. Vielmehr sollen sie

- Zahlen und Aufgaben *vor* dem Rechnen einschätzen, d. h. in einer Aufgabe Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen, die für das Rechnen hilfreich sind, erkennen, bewerten und nutzen,
- Vorgehensweisen wählen, die den aufgabenspezifischen Voraussetzungen gerecht werden, statt isolierter Automatismen, d. h. insbesondere heuristisch-strategisch denken, um das Rechnen zu erleichtern.

Diese Aktivitäten sind Indikatoren für einen *Zahlenblick*, in Anlehnung an Rathgeb-Schnierer (2006) und Schütte (2002; 2008), die sich jeweils auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen beziehen.

$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{2}{7}+\frac{3}{8}$ $\quad$ $3\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$ $\quad$ $11\frac{3}{7}-5\frac{4}{7}$ $\quad$ $\frac{34}{51}-\frac{1}{3}$

$11\frac{3}{7}-5\frac{8}{9}$ $\quad$ $11-5\frac{4}{7}$ $\quad$ $\frac{4}{11}+\frac{35}{77}$ $\quad$ $2-\frac{1}{3}$ $\quad$ $3\frac{2}{7}+4\frac{5}{7}$

$7\frac{3}{8}+\frac{9}{8}$ $\quad$ $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$ $\quad$ $5+\frac{4}{7}$ $\quad$ $1-\frac{1}{2}$ $\quad$ $8-\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{6}{7}+8$

Abbildung 1

Es ist beispielsweise nicht effektiv, die Aufgaben in Abbildung 1 grundsätzlich durch Gleichnamigmachen und Addieren bzw. Subtrahieren der Zähler lösen. Vielmehr lassen sich drei Kategorien unterscheiden:

- Aufgaben, deren Lösung man auswendig weiß oder sofort „sieht";
- Aufgaben, bei denen „strategische Werkzeuge" (Rathgeb-Schnierer 2006, S. 55) einen schnellen Weg zur Lösung freimachen;

- Aufgaben, die ein kalkülhaftes Verfahren (hier: Gleichnamigmachen) erfordern, weil kein anderer Weg erkennbar ist.

Am Beginn steht also in diesem Falls das Sortieren der Aufgaben unter dem Blickwinkel günstiger Lösungsmöglichkeiten. Um hier Entscheidungen treffen zu können bedarf es der Einschätzung der beteiligten Brüche nach bestimmten Merkmalen. Genau dieser Vorgang schärft den Blick für spezifische „Qualitäten" des Bruchs und fördert dadurch ein entdeckendes Verständnis, das bei ausschließlich kalkülhaftem Arbeiten verlorengeht bzw. gar nicht entstehen kann. Dabei besteht eine durchaus wechselseitige Beziehung: Jede Bearbeitung von Aufgaben auf diese Weise trägt zur Förderung des Zahlenblicks bei, und je besser entwickelt der Zahlenblick ist, desto schneller lassen sich aufgabenadäquate Lösungswege finden. Erst die Aufgaben, die sich nicht anders lösen lassen, werden mittels Kalkül gerechnet. Das Sortieren kann insbesondere zahlreiche Gesprächsanlässe liefern, bei denen die Eigenschaften der Aufgabe sowie der in der Aufgabe auftretenden Zahlen deutlich werden. Welche Aufgabe in welche Kategorie gehört, ist hierbei individuell unterschiedlich und ändert sich mit zunehmendem Lernzuwachs.

Der Zahlenblick kann durch vielfältige *Aufgabenformate* gefördert werden:

- Das Sortieren von Aufgaben nach günstigen Lösungswegen, das Erfinden eigener Aufgaben, die zu den Lösungswegen passen, sowie das Beschreiben und Bewerten von Lösungswegen Anderer fokussieren auf *Lösungswege*.
- Das Zuordnen von Brüchen mit gleichem Wert, das Abschätzen der Größenordnung von Ergebnissen, das Zuordnen von Aufgaben mit gleichen Ergebnissen sowie das Zuordnen von Aufgaben mit gleichem Ergebnis nehmen primär die *Ergebnisse* ins Blickfeld.
- Das Nutzen und Fortsetzen strukturierter Päckchen zielt auf Beziehungen zwischen Aufgaben, insbesondere das Erkennen gleicher Strukturen in mehreren Aufgaben.

Typische Übungen zur Förderung des Zahlenblicks können *nach* der Einführung kalkülhafter Lösungsverfahren gestellt werden, zur Etablierung von Kontrollstrategien und im Sinne kognitiv aktivierender Aufgaben. Fruchtbarer ist jedoch eine Verortung *vor* der Einführung kalkülhafter Lösungsverfahren: Dass manche Aufgaben nicht mit den vorhandenen Mitteln gelöst werden können, motiviert die Entwicklung eines Lösungsverfahrens; ferner führen manche dieser Verfahren bislang nicht lösbare Aufgaben auf schon lösbare zurück (so bei der Addition und Subtraktion gemeiner Brüche). Zudem zeigen Erfahrungen aus der Grundschule, dass Schülerinnen und Schüler sich stark an Lösungsverfahren orientieren, sobald sie über solche verfügen (vgl. Selter 2000).

2. Einordnung des Zahlenblicks

Für das Arbeiten mit gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen werden häufig zwei Aspekte mathematischen Denkens unterschieden (vgl. Wartha & Wittmann 2009): Das *semantisch-begriffliche Denken* erfasst die Beziehung zwischen Bruchzahlen einerseits und durch sie beschriebene außermathematische Sachsituationen andererseits; das *syntaktisch-algorithmische Denken* beinhaltet das verfahrensorientierte Rechnen mit Brüchen oder Dezimalzahlen, das nach festen Regeln erfolgt. Ein inhaltliches Verständnis dessen, wofür die Zahlen stehen, ist hierfür nicht unbedingt nötig.

Aktivitäten zum Zahlenblick lassen sich diesbezüglich wie folgt einordnen: Ohne semantisch-begriffliches Denken kann es keinen Zahlenblick geben; es ist beispielsweise nötig, um einen Bruch als „geringfügig kleiner als 1“ einschätzen zu können. Es findet keinesfalls ein bloßes syntaktisch-algorithmisches Arbeiten statt; der Zahlenblick bedeutet ja gerade die Abwendung vom kalkülhaften Rechnen und kann in der Unterrichtschronologie der Einführung kalkülhafter Verfahren sogar voraus gehen. Umgekehrt lassen sich viele Aufgaben aber rein innermathematisch lösen, ohne einen Bezug zu außermathematischen Sachkontexten herzustellen.

Die Aktivitäten zum Zahlenblick bringen also einen neuen Aspekt mit sich: das *Denken in Zahl- und Aufgabenbeziehungen*. Es steht zwischen semantisch-begrifflichem Denken einerseits und syntaktisch-algorithmischem Denken andererseits (wobei die Abgrenzung zu letzterem deutlich klarer ausfällt) und kann als ein Bindeglied beider Aspekte fungieren (Abb. 2).

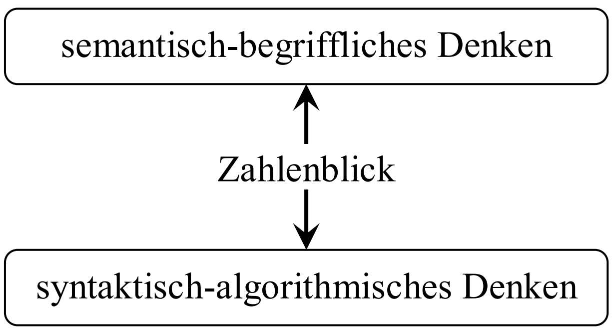

Abbildung 2

Die Zahl- und Aufgabenbeziehungen lassen sich speziell für das Rechnen mit gemeinen Brüchen noch konkretisieren als Beziehungen zwischen Zähler und Nenner eines Bruchs (vgl. Schwank 2009), zwischen zwei oder mehreren Brüchen sowie zwischen zwei oder mehreren Aufgaben.

Übungen zum Zahlenblick haben auch Auswirkungen auf die im Unterricht verwendeten *Darstellungen*. Üblicherweise werden Brüche anhand von Feldermodellen (Kreis, Rechteck, lineare Felder) eingeführt, die aus der Schematisierung von Sachkontexten erwachsen. Dieser Zugang ist nahe liegend. Aber: Er bezieht sich im Wesentlichen auf Brüche, nicht auf Bruchzahlen; er veranschaulicht die Beziehungen zwischen Zähler und Nenner eines Bruchs, nicht jedoch (oder nur ganz selten) die Beziehungen zwischen zwei Brüchen (vgl. Wittmann 2007). Am Zahlenstrahl hingegen treten Beziehungen zwischen zwei Brüchen zutage, die in Feldermodellen nicht zum Ausdruck kommen. Deshalb muss dem Zahlenstrahl eine größere Bedeutung zukommen, auch als leerer oder teilweise beschrifteter Zahlenstrahl, der nur die Ordnung der Bruchzahlen korrekt wiedergibt.

Abschließend eine Analogie zum Rechnen mit natürlichen Zahlen, wohl wissend, dass sie auch Grenzen hat: Dort wird dem kalkülhaften *Rechnen mit Ziffern* (insbesondere dem schriftlichen Rechnen) das flexible *Rechnen mit Zahlen* (hierunter fällt das halbschriftliche Rechnen) gegenüber gestellt. Im Bereich der gemeinen Brüche entspricht dem ein kalkülhaftes *Rechnen mit Zähler und Nenner* (hierzu gehören die üblichenVerfahren) sowie ein flexibles *Rechnen mit Brüchen* (basierend auf dem Zahlenblick), bei dem die auftretenden Brüche jeweils in ihrer Besonderheit betrachtet werden.

Literatur

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze. Hildesheim: Franzbecker.

Schütte, S. (2008). Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule. München: Oldenburg.

Schütte, S. (2002). Rechenwegnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. In: Journal für Mathematik-Didaktik 25(2), S. 130–148

Schwank, I. (2009): Um wie viel geht es? Orientierung im Zahlenraum mit Bruchzahlen. In: Fritz, A. & Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. 1: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Weinheim: Beltz, S. 109–122

Selter, C. (2000): Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. In: Journal für Mathematikdidaktik 23(3/4), S. 225–256

Wartha, S. & Wittmann, G. (2009): Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In: Fritz, A. & Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. 1: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Weinheim: Beltz, S. 73–108

Wittmann, G. (2007). Mit Bruchzahlen experimentieren. Darstellungen wechseln – Grundvorstellungen entwickeln. In: mathematik lehren 142, S. 17–23