Hartwig MEISSNER, Münster

Kreativität und Mathematiklernen

Abstract*. Creative problem solving happens in two modes of thinking. At the beginning a strong analytical, reflective thinking is dominant. But then intuitive thinking must interfere to get spontaneous and creative ideas.*

1. Kreativität als mentaler Prozess

Ein Vortrag von Henri Poincaré in 1908 über Mathematical Creation ist bis heute ein Grundstein zur Analyse von mathematischer Kreativität und Erfindungsgabe. Wesentlich durch diesen Vortrag angeregt entwickelte Jacques Hadamard in 1945 aufgrund intensiver Selbstbeobachtungen und der Befragung zahlreicher kompetenter Mathematiker und Physiker ein Vier-Phasen-Modell über den Ablauf kreativer mathematischer Problemlösungsprozesse oder Beweisfindungen (Hadamard 1954). Wesentlich, die Entstehung einer kreativen Lösung oder eines kreativen Beweises ist stets gekennzeichnet durch eine spontane Idee, ein „Aha-Erlebnis“ (***Illumination***), das plötzliche als Schlüssel für die Lösung erkannt wird.

Der Illumination gehen zwei Phasen voraus. In der Einarbeitungsphase (***Initiation***) setzt man sich auf der Basis bekannter Routinen und Algorithmen und bisher gemachter Erfahrungen zunächst ganz bewusst und intensiv mit der gestellten Frage auseinander. Bleiben diese Bemühungen trotz aller Anstrengungen erfolglos, so entsteht ein immer stärker werdendes mentales Spannungsfeld, das schließlich dazu führt, dass alle bewussten Lösungsversuche eingestellt werden.

War das Spannungsfeld jedoch groß und waren die Anstrengungen vielseitig und intensiv genug, so verlagert sich die Problemstellung auch ins Unbewusste (***Incubation***) und das Unterbewusstsein arbeitet weiter. Mental nicht bewusst wahrgenommen oder gar gesteuert werden verschiedenste Ideen weiter unbewusst produziert, kombiniert, getestet, verworfen, ausgebaut, und dies auch in den unmöglichsten Situationen, beim Wandern, beim Auto fahren, beim Duschen, oder gar im Schlaf. Und dann plötzlich ist da die Erleuchtung, die Illumination. Diese wird anschließend bewusst logisch überprüft (vierte Phase ***Verification***) und dann als die Problemlösung präsentiert und vom außen stehenden Beobachter als „kreativ“ empfunden.

In einer neueren Untersuchung analysiert Liljedahl (2008) ebenfalls die mentalen Prozesse prominenter Mathematiker und identifiziert bei ihrem kreativen Arbeiten zwei zusätzliche Merkmale. In der Inkubationsphase sind Details unwichtig. Im Gegenteil, zu viele Details stören und man verliert den Überblick (*De-Emphasis of Details*). In der Einarbeitungsphase dagegen steht *the Role of Talking* im Mittelpunkt. Der Erwerb des mathematischen Wissens durch Sprechen und Diskutieren erscheint viel wichtiger zu sein als durch Lesen: „I assimilate the work of others best through personal contact and being able to question them directly. [..] In this question and answer mode, I often get good ideas too” (Liljedahl, S. 157).

Liljedahl fasst zusammen: “Considering … *de-emphasizing of details* and the *role of talking* … it becomes clear that the painstakingly rigorous fashion in which mathematical knowledge is written, both in journals and in text-books, as well as the detailed fashion of over-engineered curriculums stand in stark contrast to the methods by which mathematicians claim they best come to learn new mathematics (Liljedahl, S. 157).

2. Mathematiklernen als mentaler Prozess

Durch den Mathematikunterricht (Mathematik-„Darstellungen“) sollen die Lernenden adäquate „Vorstellungen“ mathematischer Konzepte entwickeln (Meissner 2002):

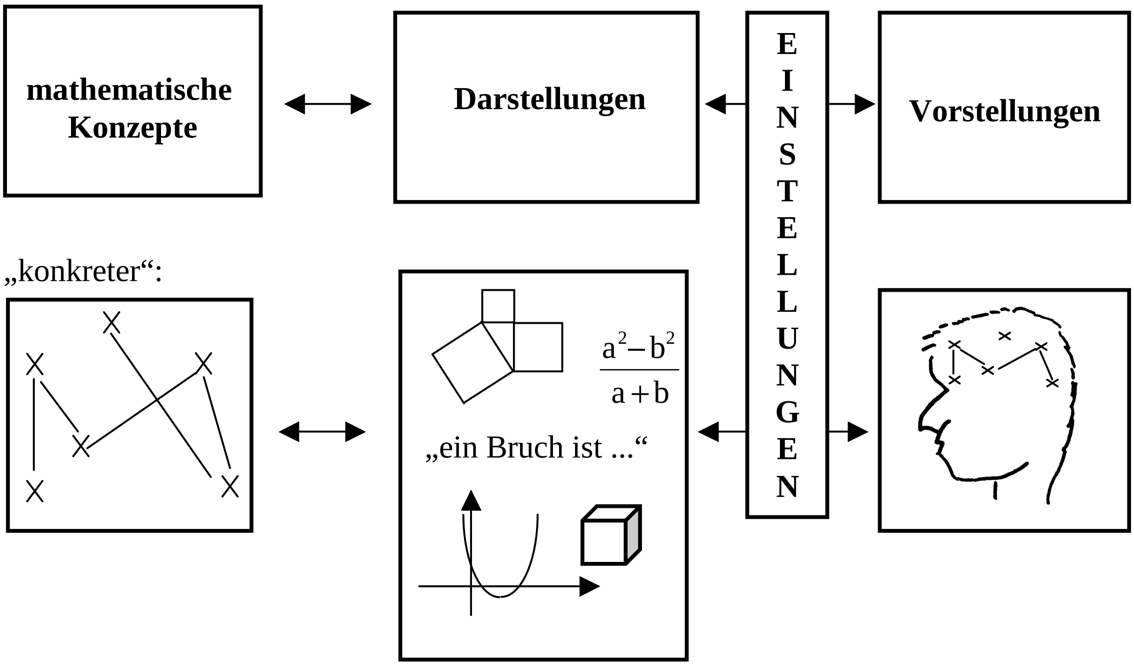

Abb. 1. Mathematische Vorstellungen entwickeln als Wechselwirkungsprozess

Wenn wir analysieren, wie sich möglichst tragfähige Vorstellungen entwickeln, so müssen wir unterscheiden zwischen intuitiv unbewussten Vorstellungen einerseits und analytisch-logisch bewussten Vorstellungen andererseits. Dieses Unterscheiden ist nicht neu. Vygotski beschreibt spontaneous und scientifical concepts, Bruner spricht von intuitive und analytic thinking, Ginsburg von informal knowledge versus written work, Skemp von relational understanding versus instrumental understanding oder Strauss gibt Beispiele für common sense knowledge versus cultural knowledge.

Das Unterscheiden von intuitiven, unbewussten Vorstellungen gegenüber analytisch-logischen Vorstellungen wird durch die Untersuchungen von Hadamard und Liljedahl noch einmal betont. Beim echten Problemlösen (nicht unbedingt beim einfachen „Vormachen – Nachmachen“) arbeiten wir nämlich zweigleisig, sowohl spontan, unbewusst, intuitiv als auch parallel dazu analytisch, logisch, reflektierend, wobei die zugehörigen Vorstellungen manchmal sich ergänzen, oder aber auch kollidieren können.

Intuitive Vorstellungen sind schnell und automatisch und brauchen keine großen Anstrengungen oder viel Speicherplatz. Aber sie sind sehr resistent gegenüber Veränderungen. Analytische Vorstellungen dagegen sind bewusst, überlegend, langsam und anstrengend, aber relativ flexibel und anpassungsfähig. Um unbewusste Erfahrungen bewusst zu machen und damit in entsprechend flexiblere Erfahrungen zu überführen sind Diskussionen ein geeignetes Mittel. Andererseits können sich logisch erarbeitete und dann hart trainierte Algorithmen und Techniken auch automatisch verdichten zu einem ganzheitlichen intuitiven Gefühl über die ablaufenden funktionalen Zusammenhänge. Ausführlicher beschäftigen sich Entscheidungstheorien mit diesen mentalen Prozessen (Dual Process Theories). Wir verweisen dazu z.B. auf Leron & Hazzan 2006 oder Evans 2008.

Das Entwickeln von Vorstellungen aufgrund vorgegebener Darstellungen ist zusätzlich stark abhängig von „Vor-Einstellungen“, die bei der Verarbeitung von „Darstellungen“ zu „Vorstellungen“ wie ein Filter einerseits oder ein Katalysator andererseits wirken können (vgl. Abb. 1). Hierzu gehören „Beliefs“ ebenso wie unterschiedlich ausgeprägte Fähigkeiten (erfinden und entdecken können, Flexibilität, räumliches Vorstellungsvermögen, ...), ein ausgeprägtes Sozialverhalten (arbeiten im Teamwork, insbesondere kommunizieren, kooperieren, argumentieren und überzeugen, …) und individuelle Persönlichkeitsmerkmale (sich identifizieren, engagieren und reinbeißen können, interessiert und fasziniert sein können, erfolgreich, glücklich, zufrieden sein wollen. …).

3. Kreativität und Mathematiklernen

Wollen wir kreatives Denken und Arbeiten im Mathematikunterricht fördern, so müssen dem Lernenden beide Typen von Denkweisen ermöglicht und auch angeboten werden. Hierzu ist es wichtig, dass sich der Unterricht nicht nur auf das Testen von Kompetenzen konzentriert, sondern dass das Mathematiklernen bewusst in Umgebungen stattfindet, in denen Kreativität und Mathematiklernen als mentale Prozesse gefördert werden können. Dies erfordert neben dem kognitionspsychologischen Hintergrundwissen auch das Angebot entsprechend geeigneter Problem- und Arbeitssituationen. Die „Darstellung“ einer Problemsituation darf deshalb nicht schon beim ersten Anblick aus einer Reihe übersichtlich angeordneter Mathematik-Schubladen genau eine aufreißen (Filterfunktion), um die dort eingelagerten Werkzeuge im Sinne von Skemp „instrumentell“ anwenden zu können. Vielmehr muss die Darstellung zumindest im ersten Moment so motivierend und attraktiv erscheinen, dass die vielfältig vorhandenen emotionalen Aspekte eingebunden und die individuellen subjektiven Erfahrungsbereiche aufgerufen werden können (Katalysatorfunktion).

Für einen Unterricht, in dem kreatives Denken und Arbeiten gefördert werden soll, benötigen wir Themen, bei denen alle vier Phasen von kreativem Arbeiten durchlaufen werden können. Dazu notwendig sind intensive Einarbeitungsphasen für das Erkunden funktionaler Zusammenhänge und für die Auswahl geeigneter Werkzeuge, Routinen, Algorithmen, Techniken, usw. Versuchen und Probieren und das Sprechen und das Diskutieren darüber müssen hier so im Mittelpunkt stehen (*Role of Talking*), dass sich das für eine unbewusste Verinnerlichung notwendige Spannungsfeld aufbauen kann und sich gleichzeitig eine mehr zusammenfassende ganzheitliche Sicht für das Problem entwickelt (*De-Emphasis of Details).*

Themen für derartige kreative Projekte könnten z.B. sein:

- Wie viele Kinder wiegen zusammen so viel wie ein Eisbär?
- Geometrische Körper in unserer Umgebung
- Stadt-Rallye
- Fußball und Fußball-Stadien
- Wie könnte eine Zeichenschablone für Funktionsgraphen aussehen?

Literatur

Evans, J. St. B. T. (2008): Dual-Processing Accounts of Reasoning, Judgment, and Social Cognition. *Annual Review of Psychology* **59**, 6.1 - 6.24.

Hadamard, J. (1954). The Psychology of Invention in the Mathematical Field. New York, NY: Dover Publications.

Leron, U.; Hazzan, O. (2006): The Rationality Debate: Application of Cognitive Psychology to Mathematics Education. *Educational Studies* 62/2, 105 – 126.

Liljedahl, P. (2008). Mathematical Creativity: in the Words of the Creators. *Proceedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*. Haifa Israel, 153 – 159.

Meissner, H. (2002). Einstellung, Vorstellung, and Darstellung. *Proceedings of PME 26, Vol. 1*. Norwich UK, 156 – 161.