Alexander MEYER, Oldenburg

Algebra als Werkzeug - der Umgang von Neuntklässlern mit einem arithmetisch-algebraischen Problem

Die Stärke des Werkzeugs Algebra ist Formalität: Inhaltliche Überlegungen können durch kräfteschonende formale Operationen ersetzt werden (vgl. Kirsch 1991, S. 296). Viele empirische Untersuchungen stellen fest, dass Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten im Umgang mit formaler algebraischer Symbolsprache haben. Der bedeutungsvolle Umgang mit Variablen muss von Schülerinnen und Schülern gelernt werden – erst so kann mit formaler algebraischer Symbolsprache unabhängig von inhaltlichen Überlegungen umgegangen werden. Ein mathematischer Inhalt muss von Schülerinnen und Schülern mental repräsentiert und dann in einen formalen Ausdruck übersetzt werden, um ein mathematisches Problem mit den Mitteln der Algebra zu lösen. Diese Übersetzung kann gestisch, sprachlich oder symbolisch vermittelt sein (Radford 2009) - diese Vermittlung verleiht dem formalen Ausdruck seine Bedeutung.

Die Beschaffenheit von Übersetzungswerkzeugen, die bei solchen Übersetzungen zwischen inhaltlichem und formalem Denken an mental repräsentierten Objekten wirksam sein könnten, beschreibt präskriptiv ein Modell von Susanne Prediger (2009). An der Schnittstelle zwischen einem Denkzyklus aus inhaltlichem und formalem Denken platziert dieses Modell *Mustersituationen, grafische Darstellungen* und *abstrakte Grundvorstellungen*. *Mustersituationen* dienen Schülerinnen und Schülern der mentalen Repräsentation von Grundvorstellungen und sind der *Kristallisationskeim* einer Mathematisierung. *Grafische Darstellungen* dienen der Analogiebildung zwischen Mustersituationen und vorliegender mathematischer Situation. Schließlich, in einem fortgeschrittenen Stadium, kann eine *abstrakte Grundvorstellung* dann als formale Repräsentation einem formalen Denken zugänglich werden.

Ich möchte mithilfe des Modells argumentieren, dass Schülerinnen und Schüler aus den hier vorgestellten Fallstudien formaler Symbolsprache keine Bedeutung geben, die von der gegebenen grafischen Darstellung losgelöst ist. Ich werde Indizien aufzeigen, dass dies ein möglicher Grund für das Nicht-Funktionieren des Problemlösewerkzeugs „formale algebraische Symbolsprache“ ist.

Methode

Anhand zweier Fallstudien mit je zwei Probanden (neunte Klasse, Gymnasium) soll sich der Hypothese interpretativ vergleichend genähert werden. Den Zweiergruppen wurde ein arithmetisch-algebraisches Problem in Form einer Sequenz von ähnlich beschaffenen Rechendreiecken (Wittmann 2005) vorgelegt. Aufgabe war es, leere Felder so mit Zahlen zu besetzen, dass eine jeweils vorgegebene Außensumme erreicht wird. Nach einer Sequenz von drei lösbaren Dreiecken wurde ein nichtlösbares vorgelegt. Danach wurde dieses Dreieck erneut vorgelegt, diesmal mit einem vorgegebenen „x“ im linken gelben Feld: Kognitive Dissonanz und die Vorgabe des Variableneintrages sollten vertiefte (algebraische) Denkhandlungen herausfordern.

Problemkontext: Rechendreiecke

Die Rechendreiecke bestehen immer aus 3 äußeren blauen Feldern und 3 inneren gelben Feldern. Die Zahlen in zwei gelben Feldern ergeben als Summe die Zahl im benachbarten blauen Feld. Die Summe der Zahlen in den äußeren Feldern wird als Außensumme bezeichnet (vgl. Abbildung 1: Kästchen unten rechts).[1] Die Rechendreiecke bilden eine grafische Darstellung einer geometrisch-arithmetischen Struktur. Ein Feld kann hier eine Platzhalterfunktion annehmen und so eine Objektsicht auf gesuchte Zahleinträge als unbestimmte Zahlen ermöglichen. So können auch Variablenvorstellungen evoziert werden. Ein Rechendreieck kann recht einfach mit Variablentermen beschrieben werden. Das im Modell beschriebene inhaltliche Denken ist hier anders gelagert: Die grafische Darstellung unterstützt eine visuelle mentale Repräsentation des Rechendreiecks. Nicht inhaltliches, sondern strukturgebundenes Denken anhand grafischer Darstellungen ist erforderlich. *Mustersituationen* sind hier durch geometrische Vorerfahrungen mit Darstellungen vorgefärbt. Wird also vom strukturgebundenen Denken mittels *grafischer Darstellungen* zu formalem strukturgebundenen Denken fortgeschritten?

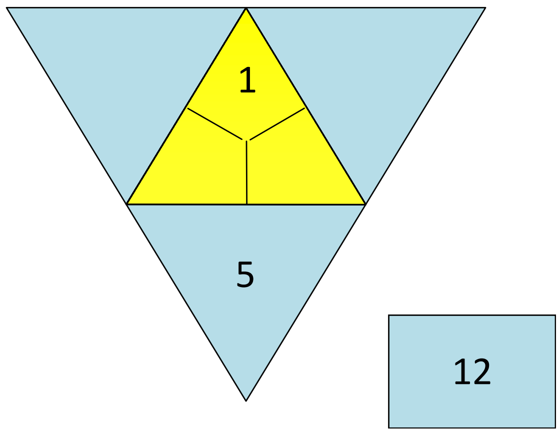

Abb. 1: Rechendreieck (Impuls 1)

Ergebnisse

Sprachliche, schriftliche und gestische Äußerungen wie etwa Zeigeimpulse wurden auch unter semiotischen Perspektiven einer Analyse unterzogen. Anhand der Interpretation der Zahl- und Variablenauffassungen in beiden

---

[1] Diese Modifizierung der Rechendreiecke wurde von Yvonne Wessels für eine Masterarbeit an der Universität Oldenburg konzipiert.

Gruppen wird herausgearbeitet, worauf sich die jeweiligen algebraischen Denkhandlungen beziehen. So wird ersichtlich, auf welche Weisen Variablenbedeutungen jeweils an den situativen grafisch-strukturellen Kontext des Rechendreiecks gebunden sind. Die Interpretation des Umgangs mit Variablentermen wurde anhand der Unterscheidung operational/objekthaft vorgenommen.

Algebraische Mustersituation und Darstellung: Timo und Stefan

Timo und Stefan repräsentieren die Struktur des Rechendreiecks geometrisch-symbolisch. Mithilfe der Struktur der Außensumme werden die Zahlen bei der Konstruktion der algebraischen Darstellung mit zusätzlicher Bedeutung aufgeladen: Die Zahlen werden Konstruktionsbausteine für den oben genannten algebraischen Ausdruck. Die Variable x wird zur Beschreibung des Problems benutzt, um die unbestimmten Objekte, d.h. die unbestimmten Summanden der Außensumme, darzustellen. Dabei wird die Bedeutung des x im Prozess der Konstruktion einer formalen Darstellung unter strukturierenden Denkhandlungen angepasst. Bezüge auf Rechendreiecksfelder und deren Beziehungen untereinander scheinen für die mentale Repräsentation von Variablen zentral zu bleiben.

Algebraische Mustersituation und Darstellung: Emma und Sophie

Bei Emma und Sophie wird deutlich, wie sie mithilfe sprachlich-gestischer Formeln die algebraische Struktur des Rechendreiecks mental repräsentieren. Die Felder des Rechendreiecks werden zu Platzhaltern für unbestimmte Zahlen, die einer objekthaften Deutung mithilfe sprachlich formulierter algebraischer Ausdrücke zugänglich sind. Diese inhaltliche Stütze wird nicht aufgegeben. Das Bedürfnis nach „unformalen“ Stützen zeigt sich auch an späterer Stelle im Interview, wenn Emma und Sophie zwar Variablen zur formalen Beschreibung des Rechendreiecks benutzen können, sich aber auch argumentativ auf Felder beziehen und offene Variablenausdrücke mit sprachlichen Formeln („irgendwas“) zu Objekten machen. Zahlen sind bei Emma und Sophie Strukturmerkmale des Rechendreiecks und auf diese Weise z.B. Summen unbestimmter Zahlen. Die vorgegebenen Zahlen entsprechen so Stellvertretern (Fischer 2009), es wird vom konkreten Zahlwert abstrahiert. Emmas algebraische Denkhandlungen vermischen sich mit einer Tendenz zur Formalisierung. Zugleich zeigt sich aber in den sprachlich-gestischen Verweisen auf Rechendreiecksfelder und Variablenausdrücke auch eine stark an die Darstellung in der Aufgabe rückgebundene Argumentation.

Zusammenfassung und Ausblick

Beide Gruppen strukturieren, konstruieren eine mathematische Darstellung und deuten Problemkontexte um - und zwar auf sehr unterschiedliche Weisen hinsichtlich einer darstellenden Vermittlung. Die Interpretation der Interviews zeigt, dass beide Gruppen den Weg zu einem argumentativen Umgang mit formaler algebraischer Symbolsprache nicht beschreiten. Wahrscheinlich findet ein Übergang von den geschilderten algebraischen *Mustersituationen* zu *abstrakten Grundvorstellungen* zu Variablen nicht statt.

Bei beiden Probandengruppen sind die algebraischen Terme (formale wie sprachlich-gestische) keine Formalisierungen, die als abstrakte Grundvorstellungen vom geometrisch-arithmetischen Kontext des Rechendreiecks abgelöst werden könnten. Es gibt keinen Hinweis auf einen Übergang zu abstrakten Grundvorstellungen; formale algebraische Argumentationen und Operationen werden nicht vorgenommen. Auch wenn das algebraische Denken elaboriert ist: Die starken Hinweise für strukturelles, grafisch vermitteltes Denken und die Einschränkungen formalen Denkens lassen vermuten, dass sich die Vorstellungen und Denkhandlungen dieser Probanden gemäß des Modells auf der Grenze zwischen formalem Denken und inhaltlichem Denken bewegen.

Literatur

Fischer, A. (2009): Zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen – Zahl- und Variablenauffassungen von Fünftklässlern, *JMD 30 (1)*, S. 3-29.

Kirsch, A. (1991): Formalismen oder Inhalte? Schwierigkeiten mit linearen Gleichungssystemen im 9. Schuljahr. *Didaktik der Mathematik 19*, S. 294-308.

Prediger, S. (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül. Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In: A. Fritz, S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden*, Weinheim: Beltz, S. 213-234.

Radford, L. (2009): Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education* (CERME 6), Université Claude Bernard, Lyon (F).

Wittmann, E.C., Müller, G. (2005): Das Zahlenbuch 1, Leipzig u.a.: Ernst Klett Grundschulverlag.