Winfried Müller, Potsdam

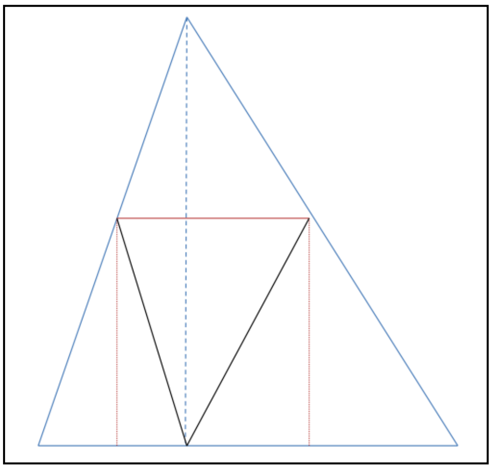
Konvex – noch immer (k)ein Thema

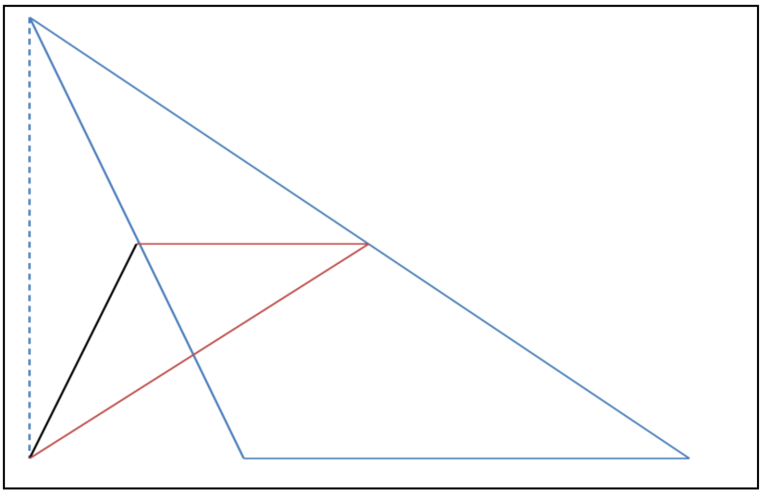
Konvex ist ein Stiefkind der Didaktik, mehr noch ein Sorgenkind! Vielleicht gelingt es nunmehr [6] diesen wie wir hoffentlich sehen werden wichtigen Begriff der momentan meist stiefmütterlichen Behandlung zu entreißen.

Für konvex finden wir Erklärungen „keine einspringenden Ecken“ oder „nicht eingebeult“, auch „eiförmig“, Letzteres wohl mit dem richtigen Gedanken im Hinterkopf, dass SchülerInnen die Vokabel aus der Physik (Linsen) bzw. ihrem Alltag (Brille!) kennen könnten. Im Fach taucht der Begriff auf als Eigenschaft von Punktmengen z. B. eines affinen Raumes, evtl. auch eines Vektorraumes: Eine nichtleere Menge M heißt konvex, wenn mit je zwei ihrer Punkte auch deren Verbindungsstrecke zu M gehört. Diese einfache Definition braucht eigentlich nicht durch Anderes ersetzt zu werden. Die Brücke zum Gegenstück „konkav“ (=hohl; Höhlen, Kavernen, engl. cave) ist leicht zu schlagen, und die Übersetzung von konvex in gewölbt liegt nahe. Zugleich erhalten wir den ersten Hinweis zur unterrichtlichen Behandlung, nämlich dass es nicht genügt wenn der Begriff nur i. Z. mit Polygonen (und Polyedern) auftaucht; hier aber wird er meist glatt verschwiegen oder vergessen!

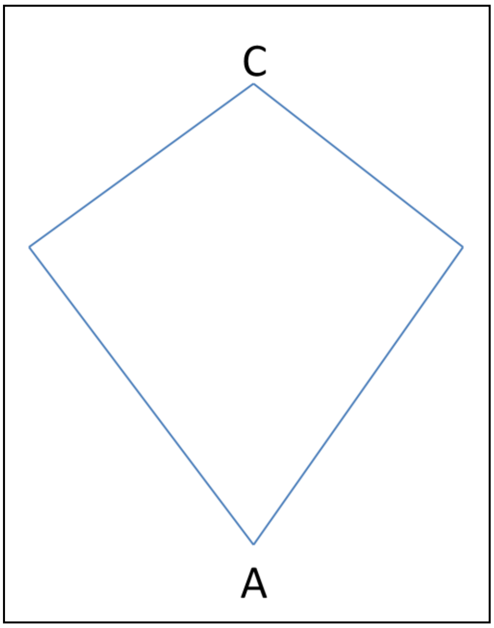
Absurd wird es, wenn wie oft zu finden Verbote aus gesprochen werden: z. B. überstumpfe Winkelfelder, weil nicht konvex, oder der reguläre zwölfzackige Stern, weil in ihm verschieden große Innenwinkel auf treten, was „nicht sein dürfe“, oft ist das gekoppelt damit, dass nicht definiert wurde, was konvex denn nun ist.

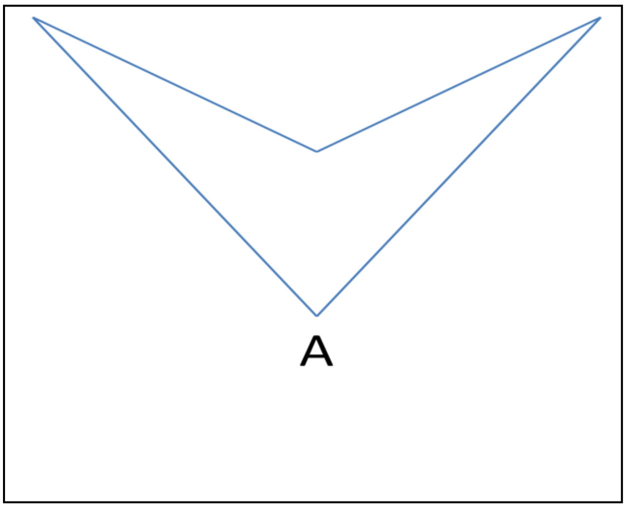
In der Unterrichtspraxis treten konvexe (oder eben nicht konvexe!) Figuren früh auf: In der Geometrie machen Grundschüler Erfahrungen mit konvexen Figuren bei Geraden, Strecken, Dreiecken, Rechtecken und Kreisen. Der erste „Schock“ taucht wahrscheinlich auf, wenn sich die schöne enaktive Begründung des Dreiecksinhaltes durch Faltenauf stumpfwinklige Dreiecke nicht recht erweitern lassen will; überhaupt scheinen wir Furcht vor nichtkonvexen Figuren zu haben, *horror vacui* mathematischer Art; eine Drehung der Figur, so dass die Grundseite dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, ist nicht überzeugend (die Formel muss doch immer gelten!).



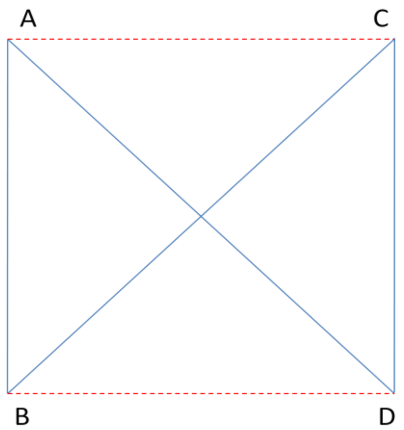


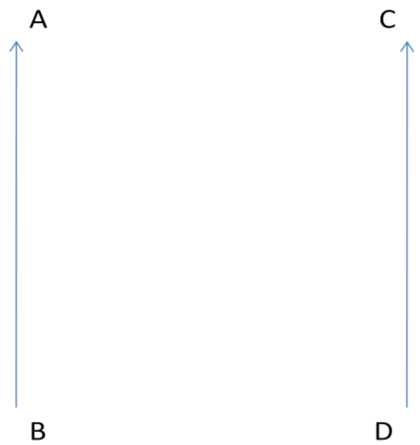
Der Natur eines curricularen Aufbaues folgend passiert dann länger nichts Erschreckendes, bis etwa in Kl. 7/8 erste Vierecke merkwürdig aus sehen; „was haben wir denn falsch gemacht?“ bei der Konstruktion des Drachens, der unerwartet zu Deltoid geworden ist („Geg. Symmetrieachse AC und α, a und b“).





Am „Schönsten“ ist natürlich das überschlagene Viereck mit parallelen Diagonalen und zwei Paaren gleich langer Seiten, dass eigentlich ein Quadrat werden sollte. So etwas kann auch in der SEK II, also der Analytischen Geometrie passieren, wenn man die Orientierung nicht beachtet; immerhin lässt





z. B. A(4|2|5), B(6|-1|11), C(-2|4|8), D(0|1|14)

sich hier klar definieren, was die o.a. Verbindungsstrecke ist, nämlich die Menge der Konvexkombinationen der Ortsvektoren der erwähnten Punkte. Hier ist dann Anlass, neben der globalen Geometrie – Geraden, Ebenen, also Linearkombinationen – die besagten Konvexkombinationen zu Ehren kommen zu lassen, also mehr lokale Geometrie zu betreiben, etwa mit den Schwerpunktsformeln; die konvexe Hülle als Vorstufe der linearen Hülle ist ein hilfreiches Mittel im Unterricht, erst die Strecke, dann die Gerade, erst das Dreieck, dann die Ebene usw.! Und hier geht es sogar wieder enaktiv: man schlage Nägel in ein Brett, umspanne dies mit einer Gummischnur und lasse diese dann los [1]!

Kehren wir zurück in die Vierecksbehandlung:

Kürzlich erschien ein Artikel [5] zum „Entdecken mit latenter Beweisidee“, darin die Analyse einer Schulbuchaufgabe für Kl. 7 der Realschule: Mittels der Frage, ob man mit Vierecken parkettieren könne, sollen die Sch auf den Vierecksinnenwinkelsummensatz gebracht werden. Ob das auch mit Deltoiden, s.o., geschweige denn überschlagenen Vierecken ginge, wird nicht untersucht, wohl weil nicht gesehen; was bei einem solchen Monstrum die Innenwinkel sind, ist ohnehin höhere

Mathematik. ABER: etliche Sätze für Vier- und Vielecke (etwa der Satz von VARIGNON, der auch für nicht ebene Vierecke gilt, die naturgemäß nicht konvex sind), setzen nicht deren Konvexität voraus, z. B. auch der EULERsche Polyedersatz (s. a. [4]). Ich teile übrigens nicht Führers Kritik [3] am „Haus der Vierecke"; wenn wir hier vom Haus der konvexen Vierecke sprechen, ist doch das lokale Ordnungsprinzip ein großer Vorteil.

Konvexität – eben ein zu vernetzender Begriff – taucht auch außerhalb der Geometrie auf, einmal in der Lineare Optimierung, bei der die Konvexität des Planungsgebietes – in der Schulmathematik sicher ein Polyeder oder Polygon - für die Existenz des Optimums der Zielfunktion Voraussetzung ist und sich aus der Anwendungssituation ergibt; der Satz von der Konvexität des Durchschnittes konvexer Mengen kann je nach Alter der Unterrichteten – sei es Kl. 8, sei es SEK II – plausibel gemacht („was passiert, wenn eine weitere Bedingung dazu kommt?") oder bewiesen werden.

Zum Zweiten in der Analysis: Zur Abschreckung ein älteres und ein aktuelles Beispiel:

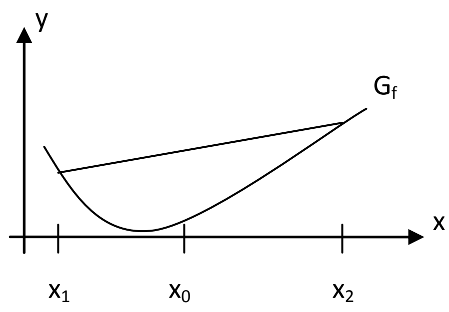
- „Eine Kurve nennen wir von oben konvex oder rechtsgekrümmt an eine Stelle x_0, wenn der Richtungsfaktor der Tangente in einer gewissen Umgebung von x_0 echt monoton abnimmt."
- „Der Graph von f ist linksgekrümmt bzw. (von unten gesehen) konvex", gegenüber der älteren Version des Werkes geradezu eine Verschlimmbesserung, da waren die Kurvenstücke Konvex- oder Konkavbögen, nur wurde nicht erklärt was das eigentlich heißt.

Immerhin wird hier der schülernähere Krümmungsbegriff (bzw. der Begriff Linkskurve) in den Kontext des Konvexitätsbegriffes gesetzt; aber in der zitierten Formelsammlung (wie in vielen anderen!) wird „konvex" selbst überhaupt nicht definiert!

Bekanntlich führt Jakob BERNOULLI den Wendepunkt [2] ein wie folgt:

„Es gibt gewisse Kurven, die eine zwiefache Krümmung haben, zuerst nämlich gegen die Achse konkav und nachher konvex." Offensichtlich versteht BERNOULLI dies im Sinne der heutigen Definition:

„Eine auf einem reellen Intervall I definierte reellwertige Funktion heißt konvex, wenn für alle x_1, x_2 aus I und $0 \le t \le 1$ gilt: (*) $f[tx_1 + (1-t)x_2] \le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$" (JENSENsche Ungleichung).

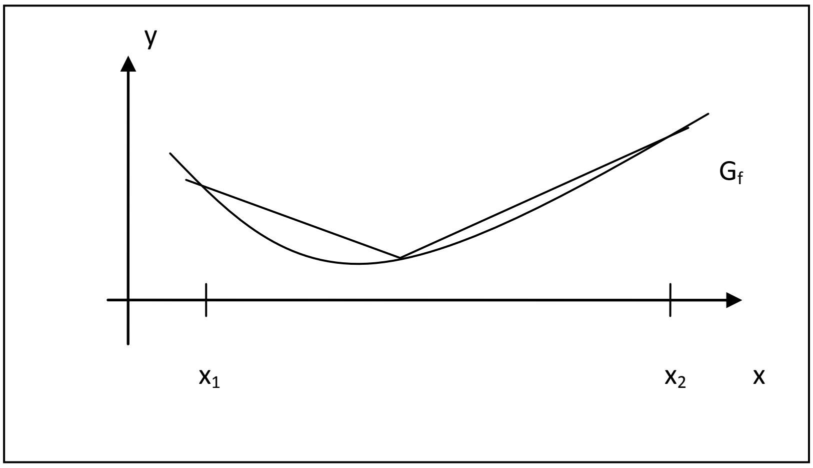


$x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$, $0 \le t \le 1$

Offensichtlich bedeutet dies, dass jede Sehne oberhalb des Funktionsgraphen liegt; also ist der sogenannte Supergraph der Funktion – die Punktmenge oberhalb des Graphen – konvex. Ebenso offensichtlich ist dies zu zeigen nicht ganz trivial. Aber deswegen muss der Begriff weder verschwiegen werden noch stilblütenartig umgangen werden, s. o.

Der gewünschte Zusammenhang mit der Krümmung ist übrigens (s. o.) leicht herstellbar:

Für differenzierbares konvexes f gilt $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, wie sich durch Vergleich der Sekantenanstiege ergibt, weswegen (Monotoniekriterium) $0 \leq f''$ für zweifach differenzierbares f.



Dass konvexe Funktionen ein interessanter Gegenstand der Fachwissenschaft sind (sie sind z. B. absolutstetig; der Differenzenquotient ist beschränkt, weil einer Lipschitz-Bedingung genügend), gehört kaum in die Schule. Dorthin aber gehört gewiss der Begriff als solcher wie ich hoffe deutlich gemacht zu haben.-

Fassen wir zusammen:

- Der Konvexitätsbegriff muss auch im Mathematikunterricht behandelt werden.
- Dazu gehört eine fachlich korrekte und altersgerechte Definition.
- Wo Konvexität eine Voraussetzung für eine Tatsache ist (und auch wo nicht!), ist das zu formulieren.
- Die unterrichtliche Behandlung des Themas in den verschiedenen Teilgebieten hat so zu erfolgen, dass eine Vernetzung befördert und nicht behindert oder gar verhindert wird.

<u>Literatur</u>:

[1] Bielig-Schulz, G. und Schulz, Chr. : Algorithmische Geometrie: neue Motivation für die Oberstufengeometrie aus der Informatik?, MNU 44/6 (1991) S. 361-366

[2] Danckwerts, R und Vogel, D.: Analysis für den Leistungskurs, Stuttgart 1986

[3] Führer, L. : Mittelpunkte von Vierecken, ML 1985 (8), S. 38-43

[4] Kirsch, A. : Überraschungen beim Ausklappen nichtkonvexer Vierecke, MNU 43/8 (1990), S. 485-498

[5] Meyer, M. und Vogt, J.: Entdecken mit latenter Beweisidee, JMD 29/2 (2008), S. 124 ff.

[6] Müller, W.: Der Konvexitätsbegriff im Sekundarstufenunterricht, ML 30/9, S. 484-490.