

Kathleen PHILIPP, Freiburg, Timo LEUDERS, Freiburg

Innermathematisches Experimentieren – Eine empirische Analyse von Denkprozessen beim Experimentieren mit Beispielen

Innermathematisches Experimentieren ist ein bislang in der Didaktik wenig verwendetes Konzept. Das Modell zum Erkenntnisgewinn von Peirce (1965) bietet eine Möglichkeit dieses Konzept erkenntnistheoretisch zu verorten. Peirce unterscheidet drei Formen wissenschaftlichen Schließens: Abduktion, Induktion und Deduktion. Die Abduktion wird als kreativer Akt des Hypothesenbildens zur tentativen Erklärung eines Phänomens beschrieben und ist folglich ein erkenntniserzeugender Vorgang. Der Induktion schreibt Peirce die Bedeutung des Hypothesenprüfens in Form einer empirischen Prüfung an Einzelfällen, also an Beispielen, zu. Deduktives Schließen spielt beim Begründen und Beweisen einer Vermutung eine bedeutende Rolle, nicht aber beim Generieren neuer Erkenntnisse. Im Folgenden sprechen wir von innermathematischem Experimentieren, wenn wir uns auf das Wechselspiel abduktiver und induktiver Erkenntnisprozesse beziehen. Diese kann man auch als „Hypothesenbilden und Hypothesenprüfen an Beispielen“ charakterisieren. Sie bilden für das „Mathematiklernen“ bedeutende Teilprozesse und bilden sich auch in Ergebnissen der mathematiksoziologischen Forschung (etwa Heintz 2000) ab, die das Entstehen von Hypothesen aus der Anschauung von Beispielen als „quasi-experimentelles“ Vorgehen beschreibt.

Ziel des hier vorgestellten Projektes ist die Untersuchung von innermathematischen Erkenntnisprozessen von Lernenden in der Schule als Grundlage für ein differenziertes Verständnis von Lernprozessen.

Experimentieren als Suche in Räumen

Das Modell zum wissenschaftlichen Erkenntnisgewinn von Klahr/Dunbar (1988) beschreibt Experimentieren als Suche in zwei Räumen– einem Hypothesensuchraum, in dem Vermutungen aufgestellt werden und einem Experimentesuchraum, in dem Experimente generiert werden, um einerseits Vermutungen zu überprüfen (bzw. zu falsifizieren) und andererseits den Phänomenbereich zu erkunden. Der Forschungsprozess besteht somit in einem fortwährenden Hin- und Herwechseln zwischen diesen beiden Räumen.

Dieses Modell lässt sich auf die Mathematik übertragen und erweitern, wenn man das Untersuchen von Beispielen als Experiment im Prozess des mathematischen Erkenntnisgewinns deutet und so einen *Beispielraum* und

einen *Hypothesenraum* gewinnt. Die für Erkenntnisgewinn interessanten Prozesse zeigen sich vor allem im Wechsel der beiden Räume, die sich in einem dritten Raum, dem *Strategieraum*, verorten lassen (Philipp/Matt/Leuders 2009).

Beispielraum	Strategieraum	Hypothesenraum
Enthält alle möglichen Beispiele des Phänomenbereichs.	Spezifische Beziehungen zwischen Beispielraum und Hypothesenraum	Enthält alle möglichen Hypothesen über das Phänomen (Aussagen über den Beispielraum).

Studie 1: Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schülern

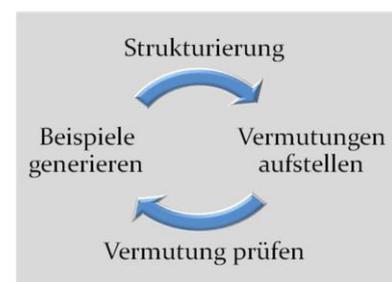
Zentrale Fragestellung der qualitativen Videostudie war eine Typenbildung experimenteller Prozesse. Es wurde untersucht, welche typischen Vorgehensweisen sich beim innermathematischen Experimentieren beschreiben und gegeneinander abgrenzen lassen.

Eingesetzt wurden dazu Videografien von Probanden bei der Bearbeitung verschiedener offener Fragestellungen (z.B. „was kannst du alles über ... herausfinden?“). Solche Aufgabenstellungen für Strukturexplorationen sind in hohem Maße geeignet, experimentelles Arbeiten mit Beispielen zu initiieren. Analysiert wurden die Bearbeitungsprozesse der Probanden mittels Grounded Theory. So konnte in der Phase des freien Kodierens ein umfassendes Kategoriensystem gewonnen werden, das einzelne Strategien beim innermathematischen Experimentieren beschreibt, die hier exemplarisch dargestellt werden (vgl. Philipp/Matt/Leuders 2009).

Kode	Kodenotiz	Beispiel
Beispielorientierte Hypothese	Hypothese wird direkt in Anknüpfung an ein Beispiel gebildet.	„16 geht nicht. Die Quadratzahlen gehen nicht (als Treppenzahl).“
Gegenbeispiel	Beispiel wird genutzt, um eine Vermutung zu verwerfen oder genauer zu spezifizieren.	„die 10 geht auch als Treppenzahl – also gehen auch gerade Zahlen als Treppenzahlen“
Reihenfolgebeispiel	Beispiele werden in systematischer Reihenfolge ausprobiert.	Die Zahlen von 1 bis 20 als Treppenzahlen darstellen.

Beim axialen Kodieren entstand ein theoretisches Begriffsnetz zum innermathematischen Experimentieren, indem die einzelnen Kategorien gruppiert und miteinander verknüpft wurden. So konnten vier Hauptkategorien extrahiert werden, die wiederum zueinander in Beziehung gesetzt werden können.

Diese Hauptkategorien kann man als Teilkompetenzen des innermathematischen Experimentierens deuten: Zunächst werden Beispiele generiert. Um zu einer Vermutung zu gelangen, müssen diese (tatsächlich oder mental) strukturiert werden. Vermutungen werden dann an weiteren Beispielen überprüft. Die Ergebnisse



dieser ersten qualitativen Studie und das daraus gewonnene Kompetenzmodell zum innermathematischen Experimentieren bilden die Basis für die zweite empirische Studie.

Studie 2: Einsatz einer Kompetenzskala im Rahmen einer Intervention

Zentrale Fragestellungen dieser Studie sind: Inwiefern können Teilkompetenzen des innermathematischen Experimentierens durch ein gezieltes Training gefördert werden? Und als Voraussetzung zur Bearbeitung dieser Frage: Wie kann die Entwicklung der Kompetenzen geeignet erfasst werden?

In einer Pilotphase wurde ein Training in eine Unterrichtseinheit mit innermathematischen Inhalten eingebettet und in zwei Klassen (6. Jahrgangsstufe, Hauptschule und Realschule) durchgeführt. Eine weitere Klasse diente hierbei als Kontrollgruppe. Zur Überprüfung der Wirksamkeit des Trainings wurden einerseits Testitems entwickelt, die ebenfalls im Rahmen dieser Studie pilotiert wurden und andererseits qualitative Elemente (Schülerinterviews, Unterrichtsbeobachtung, Analyse von Arbeitsprodukten, Lehrerbefragung) eingesetzt.

Die Intervention wurde in Anlehnung an das Modell heuristischer Bildung von Bruder (2003) in vier Phasen gegliedert: Zunächst wurden die Schülerinnen und Schüler mit der Art der Aufgaben vertraut gemacht. An einigen zentralen Aufgaben wurden Vorgehensweisen (Strategien) expliziert, die Verwendung dieser reflektiert und an weiteren Aufgaben bewusst eingesetzt. Zentrales Element der Intervention ist hier das Verbalisieren von Bearbeitungsschritten sowie das Kommunizieren darüber. Unterstützt werden die Bearbeitungsprozesse durch Hilfsfragen, die den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung stehen und deren Verwendung ebenso Gegenstand der Reflexion und Kommunikation darstellt.

Im Folgenden sollen erste Ergebnisse der Auswertung des Tests, der in der Pilotstudie eingesetzt wurde, vorgestellt werden.

Erste Ergebnisse und Ausblick

Der Test, der im Prä-Post-Design zur Überprüfung der Wirksamkeit der Intervention eingesetzt wurde, umfasst verschiedene Komponenten, hierzu gehören ein Fragebogen zur momentanen Motivation vor und nach der Aufgabenbearbeitung, Verständnisaufgaben, die auf inhaltliche Schwierigkeiten hinweisen können und Aufgaben, die die vier oben genannten Teilkompetenzen prüfen sollen.

Bei der gesamten Experimentalgruppe lässt sich beim überwiegenden Teil der Aufgaben im Post-Test eine Verbesserung feststellen. Ein Vergleich

der beiden untersuchten Schultypen (Hauptschule und Realschule) ergab signifikante Unterschiede hinsichtlich des Interaktionseffekts. Bezüglich der hier gewählten Stichprobe ist auffällig, dass die Intervention bei der untersuchten Gruppe der Realschüler deutliche bessere Effekte zeigt. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, dass gewisse Voraussetzungen für das Erlernen übergreifender Strategien gegeben sein müssen, die im Einzelnen noch bestimmt und erfasst werden müssten.

Betrachtet man konkrete Aufgabenlösungen, ist anzumerken, dass die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe besonders in den Bereich „Strukturen erkennen“ und „Vermutung formulieren“ sowohl hinsichtlich der Anzahl der Vermutungen als auch der inhaltlichen Qualität der Aussagen Fortschritte gemacht haben. Deutlich ist der Kompetenzzuwachs auch im Bereich „Vermutung prüfen“, in dem vor allem die Strategie, ein Gegenbeispiel zu suchen, im Post-Test zu beobachten war.

Für die Hauptuntersuchung steht nun die Weiterentwicklung der Testaufgaben zur Verbesserung der Skalenqualität, die Optimierung der Unterrichtsintervention und möglicherweise die Erfassung weiterer Merkmale, die Lernen beeinflussen, an. Ziel ist dann, differentielle Effekte hinsichtlich verschiedener Schülergruppen und verschiedener Leistungsbereiche aufzudecken und zu erklären. Auf theoretischer Seite soll die vorliegende Konzeptualisierung von Prozessen des „innermathematischen Experimentierens“ in engeren Bezug zu alternativen Modellen (Problemlösen, induktives Denken) gebracht und abgegrenzt werden.

Hinweis: Die hier beschriebene Unterrichtseinheit ist eingebunden in das Forschungsprojekt „Kontexte für sinnstiftenden Mathematikunterricht“ (KOSIMA) unter Leitung von B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders und S. Prediger.

Literatur

- Bruder, R. (2003): *Methoden und Techniken des Problemlöselernens*. Material im Rahmen des BLK-Programms „SINUS“ zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Kiel: IPN.
- Heintz, B. (2000): *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Springer-Verlag, Wien.
- Klahr, D./ Dunbar, K. (1988): *Dual Space Search During Scientific Reasoning*. In: *Cognitive Science* 12, 1-48.
- Peirce, C. S./ Walther, E. (Hrsg.) (1965): *Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften*. Agis Verlag GmbH, Baden-Baden.
- Philipp, K., Matt, D., Leuders, T. (2009): *Experimentelles Denken – Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schülern bei innermathematischen Erkundungen*. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Münster: WTM Verlag