Franz PICHER, Klagenfurt

Nachdenken über die Schulanalysis

Der folgende Beitrag beginnt mit zentralen Aspekten des „Verstehens“ von Mathematik, gibt Hinweise darauf, warum dieses in der „üblichen“ Schulanalysis zu wenig gegeben ist und gibt dann Vorschläge zur Verbesserung desselbigen.

1. „Verstehen“ am Beispiel der lokalen Änderungsrate: Desiderata

„Verstehen“ ist ein vielschichtiger Begriff (siehe beispielsweise Scholz 1999), dessen Weite im Folgenden auf drei zentrale Aspekte reduziert wird. Nachstehend werden diese Aspekte anhand von Fragestellungen illustriert, die beispielhaft für die lokale Änderungsrate beantwortet werden:

- Einordnung: *In welchem Verhältnis steht der (neu gelernte) Inhalt zum Bisherigen?*
  Die lokale Änderungsrate soll als eine Beschreibungsmöglichkeit von Änderungen aufgefasst und mit anderen in Beziehung gesetzt werden.
- Deutung im Kontext: *Wie kann der Inhalt im Kontext gedeutet werden?*
  Die lokale Änderungsrate kann (direkt) weder als Zustand noch als Änderung (zwischen zwei Zuständen) interpretiert werden.
- Sinn: *Was kann durch den Inhalt jetzt besser bzw. zusätzlich beschrieben werden? Wozu das Ganze? Wozu soll ich das lernen?*
  Welche Rolle spielt die lokale Änderungsrate im Rahmen der Beschreibung von Änderungen? Wozu soll ich etwas über die lokale Änderungsrate lernen?

Der Beantwortung der die Aspekte illustrierenden Fragestellungen sollte genügend Raum in jedem Unterrichtsprogramm zur Verfügung gestellt werden. Die Fragestellungen müssen dabei explizit angesprochen werden und dürfen nicht etwa nur Hintergrundwissen der Lehrperson darstellen. Die Fragen zeigen die Bedeutung von Reflexion, Voraussetzung dafür ist aber Grundwissen. Dieses wird in den folgenden Überlegungen als gegeben angenommen, es wird also eine (technische) Einführung in den Lerninhalt vorausgesetzt. Ebenso werden „übliche“ Deutungen der lokalen Änderungsrate im Kontext vorausgesetzt; die obige Antwort soll illustrieren, was darüber hinaus wichtig scheint und worüber aber zu wenig nachgedacht wird. Die Nicht-Beantwortung der Fragestellungen beim Sinn-Aspekt weist darauf hin, dass es sich beim Verstehen um einen Prozess individueller Aneignung handelt. Gerade im Rahmen der Sinnfrage steht eine Bewertung der Relevanz des Lerninhalts im Zentrum der Betrachtungen, weshalb Raum für Reflexionen mit offenem Ende geschaffen werden muss.

2. „Verstehen“ am Beispiel der lokalen Änderungsrate: Status quo

Anhand obiger Aspekte werden nun Hinweise darauf gegeben, wieso eine Ermöglichung des „Verstehens“ im „üblichen“ Mathematikunterricht zu wenig gegeben zu sein scheint:

- Einordnung: Andere Änderungsmaße dienen (nur) als Wegbereiter für die lokale Änderungsrate, die alsdann alleinig im Fokus steht.
- Deutung im Kontext: Die Deutung der lokalen Änderungsrate als Änderung bzw. als Zustand wird kaum problematisiert.
- Sinn: Sinnfragen werden in den Hintergrund gedrängt, was die individuelle Aneignung und somit das „Verstehen“ erschwert.

3. Ein Vorschlag

Zwei Perspektiven werden als Beitrag zur Verbesserung des „Verstehens“ in obigem Sinne vorgeschlagen:

- Aufweitung des Blicks
- Auftrennung der Inhalte

„Aufweitung des Blicks“ bedeutet ein Zurücktreten, eine Betrachtung des eigentlichen Lerninhalts aus „sicherer Entfernung“, um die Umgebung wahrzunehmen. Diese Umgebung meint einerseits den Alltag (bzw. die Alltagssprache). Andererseits ist eine natürliche Umgebung, die durch Aufweitung des Blicks sichtbar werden soll, das bisher (in der Schule) Gelernte. Ein Rückblick und ein Stellen von Fragen wie „Was macht die Besonderheit der Mathematik, und im Speziellen der Differentialrechnung, im Zusammenhang mit der Beschreibung von Änderungen aus?“ sollten daher zentrale Elemente eines Unterrichts in der Sekundarstufe II sein.

Mit der „Auftrennung der Inhalte“ greife ich einen Vorschlag von Roland Fischer auf, die wesentlichen Ideen der (Schul-)Analysis besser sichtbar, erlernbar, diskutierbar und kritisierbar zu machen, indem im Unterricht zwischen „Änderungsrechnung“, „Infinitesimalrechnung“ und „Kalkül“ getrennt wird. Nun ist (zunächst diskret gedachte) Änderungsrechnung an sich nichts Neues – man denke an Systemdynamik oder an Kurse in „Precalculus“. Der Vorschlag „Auftrennung der Inhalte“ beinhaltet aber ganz wesentlich ein In-Beziehung-Setzen von Alltag und Mathematik, diskreten und kontinuierlichen Beschreibungen sowie Gelerntem und noch zu Lernendem. Darüber hinaus wird damit für ein Sichtbar-Machen dieser Auftrennung plädiert, und zwar auch für die Lernenden. Im Folgenden wird beispielhaft präzisiert, was unter dem Bereich „Änderungsrechnung" verstanden werden soll und wie ein Nachdenken über Änderungen in der Sekundarstufe II am Übergang zur Infinitesimalrechnung aussehen kann:

Bei eingehender Betrachtung von Beschreibungen von Änderungen zeigt sich, dass bereits in der Alltagssprache Größen verwendet werden, die Änderungen zum Gegenstand der Betrachtung machen (Picher 2009, S. 791). Dadurch können Änderungen wie Zustände behandelt werden: In der Aussage „Die Neuverschuldung des Bundes sinkt." steht „Neuverschuldung" für die Änderung der Verschuldung, und deren Beschreibung durch das Wort „sinkt" ist analog zur Beschreibung der Änderung eines Zustands (vgl. Hahn & Prediger 2008, S. 164).

Die Mathematik arbeitet nun originär mit Objekten, gerade die lokale Änderungsrate sollte als ein solches mathematisches Objekt erfahrbar gemacht werden. Ein Erkennen des „Zum-Objekt-Machens" als Besonderheit der Mathematik ist daher vor der Behandlung der Infinitesimalrechnung vonnöten. Dazu können beispielsweise die Addition natürlicher Zahlen und darauf aufbauend die Einführung negativer Zahlen (rück-)betrachtet werden. Anhand dieser Betrachtungen kann der (für die Analysis) wichtige Übergang von einer Handlung (dem Subtrahieren) zu einem Objekt (der negativen Zahl) als Leistung der Mathematik erkannt werden: Die Addition zweier Zahlen kann als Beschreibung der Änderung einer Größe um eine andere Größe aufgefasst werden (vgl. Kirsch 2004, S. 64). Dabei steht die erste Zahl für einen Zustand und die zweite Zahl für die Änderung dieses Zustands, die Summe gibt den neuen Zustand nach erfolgter Änderung an. Nun können dieselben Zahlen, die für die Beschreibung von Zuständen verwendet werden, auch für die Beschreibung der Änderung von Zuständen verwendet werden. So kann die Addition $3 + 5 = 8$ als Änderung von 3 um 5 oder als Änderung von 5 um 3 interpretiert werden. Die Zahlen bekommen in der mathematischen Beschreibung daher dieselben „Namen": Man spricht von Summanden. Die Unterscheidung zwischen Größen, die einen Zustand beschreiben und Größen, die für eine Änderung stehen, ist in der mathematischen Beschreibung (zunächst) irrelevant. Änderungen werden – in derselben Art und Weise wie Zustände – zu Objekten mathematischen Tuns, man entfernt sich von der (Alltags-)Vorstellung, die Änderungen mit Prozessen oder Handlungen verbindet. Im Falle der Verwendung von Mathematik führt erst die Interpretation im Kontext zu einer Unterscheidung von Zuständen und Änderungen. Die konsequente Verfolgung dieses Grundsatzes führt dann auch zur Einführung der negativen Zahlen: Aus der Beschreibung einer Änderung mithilfe natürlicher Zahlen, $8 - 5 = 3$, wird in der Darstellung 8 + (-5) = 3 das Zeichen -5 als Objekt definiert, das zu 8 addiert wird. Aus der (gedanklichen) Handlung „Subtrahieren von 5“ entsteht ein Objekt, auf das Regeln angewandt werden können. Die Zahl „-5“ kann dadurch auf der einen Seite für die Beschreibung eines Abnahme-Prozesses und auf der anderen Seite für die Beschreibung eines Zustands dienen. (Man denke dazu an das Beispiel der Temperatur.)

Dieser „besondere“ Umgang mit Objekten in der Mathematik ermöglicht erst die Infinitesimalrechnung. Dies sollte den Lernenden bewusst gemacht werden und daher auch im Unterricht angesprochen werden: Da mathematische Objekte als Änderungen und als Zustände interpretiert werden können, muss (zunächst) weder von Zustand noch von Änderung gesprochen werden. Die Analysis setzt diesen Gedanken fort und ermöglicht (mithilfe des Zum-Objekt-Machens) die Beschreibung kontinuierlicher Änderungen. Die lokale Änderungsrate kann im Rahmen der Interpretation im Kontext (direkt) weder als Zustand noch als Änderung (zwischen zwei Zuständen) gedacht werden: Einerseits sind zwei Zustände für ihre Berechnung vonnöten, dies spricht zunächst gegen die Interpretation als Zustand. Andererseits setzt unser Alltagsverständnis von Änderungen voraus, dass jede Änderung zwischen zwei wohldefinierten und unterscheidbaren Zuständen stattfinden muss. Dies widerspricht zunächst der Interpretation der lokalen Änderungsrate als Änderung. Dies erscheint uns als problematisch, weil wir (außerhalb der Mathematik) gewohnt sind, dass Begriffe nicht erst durch die Begriffsbildung geschaffen werden. Es ist daher im Rahmen eines Nachdenkens über Änderungen wichtig, darauf hinzuweisen, dass die lokale Änderungsrate als „ungebundene“ Beschreibungsform gesehen werden muss, die zunächst weder einen Zustand noch eine Änderung beschreibt. Dies stellt eine Fortführung des obigen Gedankens dar, dass in der mathematischen Beschreibung die Unterscheidung von Größen, die einen Zustand beschreiben, von Größen, die für eine Änderung stehen, irrelevant sei. Durch die Einführung der lokalen Änderungsrate gibt man die Möglichkeit zur Unterscheidung auf; durch die lokale Änderungsrate werden Änderungen zu Zuständen „gemacht“.

Literatur

Hahn, S. & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29(3/4),* 163 - 198.

Kirsch, A. (2004). *Mathematik wirklich verstehen.* Köln: Aulis Verlag Deubner.

Picher, F. (2009). Beschreibung von Änderungen. In: M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 791 - 795). Münster: WTM-Verlag.

Scholz, O. (1999). Verstehen. In: H. J. Sandkühler (Hrsg.), *Enzyklopädie Philosophie* (Sp. 1698 - 1702). Hamburg: Felix Meiner.