

Guido PINKERNELL, Darmstadt

Rechnerfreie Mathematik in einem technologieorientierten Unterricht

Im Sommer 2010 wird ein Projekt starten, dessen Ziel die Entwicklung und Erprobung von unterrichtspraktischen Methoden ist, die unterstützend wirken für die langfristige Verfügbarkeit mathematischer Grundfertigkeiten und -wissen in einem Unterricht, der durch einen intensiven Einsatz digitaler Medien geprägt ist. Es handelt sich um ein Nachfolgeprojekt des niedersächsischen Schulprojektes CALiMERO, das die Entwicklung und Erprobung eines ganzheitlichen Unterrichtskonzepts für den Einsatz von CAS in der Sekundarstufe I verfolgte und derzeit ausgewertet wird (Bruder und Inngelmann 2009). Ein Schwerpunkt dieses auslaufenden Projektes war die explizite Unterstützung „rechnerfreier Fertigkeiten“. Erste Auswertungen scheinen vielversprechend, so dass eine Weiterentwicklung der diesbezüglichen Unterstützungsmethoden in der Oberstufe – jetzt mit Blick auf die Schnittstellenproblematik (vgl. Bruder et al. 2010) - im Rahmen des Nachfolgeprojektes CALiMERO SekII sinnvoll erscheint.

Ein Teil der Weiterentwicklung wird in der Formulierung eines Fähigkeitskataloges bestehen, der sich hinsichtlich Inhalte und Wissensaspekte an den Eingangsanforderungen von Universitäten und Hochschulen orientiert, dabei aber die schulspezifischen Bildungsanforderungen nicht aus dem Blick verliert.

„Rechnerfreie Mathematik“: Mehr als nur Kalkül

Eine Langzeitstudie mit Studieneingangstests zeigt mit einer durchschnittlichen Leistungserfüllung von knapp unter 50% seit 2002 „stabile und alarmierend schwache Ergebnisse“ (Knospe 2009). Mit der Beschränkung auf Fachhochschulstudenten ist die Probandenauswahl nicht repräsentativ, trotzdem reiht sie sich ein in eine Serie von Klagen über mathematische Grundkenntnisse bei Studienanfängern. Schon Nägerl et al. (1973) wiesen in einer Untersuchung auf erschreckend schwache mathematische Leistungen bei Anfängern in medizinischen Studienfächern hin. Der Zeitpunkt dieser letztgenannten Erhebung dürfte Hypothesen hinsichtlich eines ursächlichen Zusammenhanges von Rechneinsatz und mathematischen Grundkenntnissen relativieren. Trotzdem sind beide Studien insofern interessant, weil sie Aufschluss über geforderte Inhalte geben. Es sind dies mit z.B. Termumformungskennnissen und Rechnen mit Exponenten und Logarithmen in der Studie Knospe (2009) in erster Linie Themen aus der Sekundarstufe I, so dass sich das Problem mangelnder Grundkenntnisse im wesentli-

chen als ein **Problem mangelnder langfristiger Verfügbarkeit** darstellt. Ein Blick in öffentlich verfügbare Eingangstests aus Fachhochschulen und Universitäten bestätigt diese Einschätzung: Gefordert sind überwiegend Grundrechenarten, Bruch- und Prozentrechnung, Dreisatz, Gleichungen usw., weniger häufig Kenntnisse im Differenzieren und Integrieren aus der Oberstufe.

Neben der inhaltlichen Zusammensetzung wird anderes deutlich: Zwar besteht durchaus ein Überhang an **kalkülorientierten Aufgabenstellungen** (Abb. 1). Es sind aber auch Aufgaben vertreten, die offensichtlich das Ziel verfolgen, das **Verständnis mathematischer Begriffe** und Modellierungs- bzw. Problemlösefähigkeiten zu prüfen (Abb. 2 bis Abb. 4). In diesen Aufgaben werden konzeptionelle Anknüpfungspunkte zwischen Schule und weiterführenden Bildungseinrichtungen auch im Bereich mathematischen Grundwissens deutlich. Das betrifft zum einen die ausdrückliche Kompetenzorientierung der schulischen Bildungspläne seit den KMK Bildungsstandards, in denen z.B. die Auseinandersetzung mit ungewohnten Aufgabenstellungen (Problemlösen), das Beschreiben von außermathematischen Sachsituationen durch mathematische Modelle (Modellieren, Darstellungen verwenden). Zum anderen

betrifft das Erwartungen an den Einsatz von CAS und GTR in Schulen. Angesichts solcher Einstellungstests wäre ein Verbot von Rechnern in der Schule, wie mancherorts gar gefordert, nur kontraproduktiv – vorausgesetzt natürlich, dass CAS und GTR nicht nur als Kalkülersatz verwendet wird, sondern im Rahmen sinnvoller Unterrichtskonzepte auch ihre Stärken entfalten können.

- | | |
|-----|--|
| 2) | Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck $\frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1}$ |
| 3) | Berechnen Sie x aus der folgenden Gleichung $\frac{3}{2}$. |
| 4) | Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck: $\lg \frac{a}{b} + 1$; |
| 5) | Berechnen Sie x aus der folgenden Gleichung $\left(\frac{3}{2}\right)$ |
| 6) | Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck: $\left(\frac{a^2}{x^3}\right)^{-2}$ |
| 7) | Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf: $\frac{a+}{x}$ |
| 8) | Berechnen Sie x aus der folgenden Gleichung \sqrt{x} |
| 9) | Berechnen Sie x aus der folgenden Gleichung $(x \cdot$ |
| 10) | Berechnen Sie x aus der folgenden Gleichung $x^2 \cdot$ |
| 11) | Berechnen Sie x aus der folgenden Gleichung $ 2x$ |

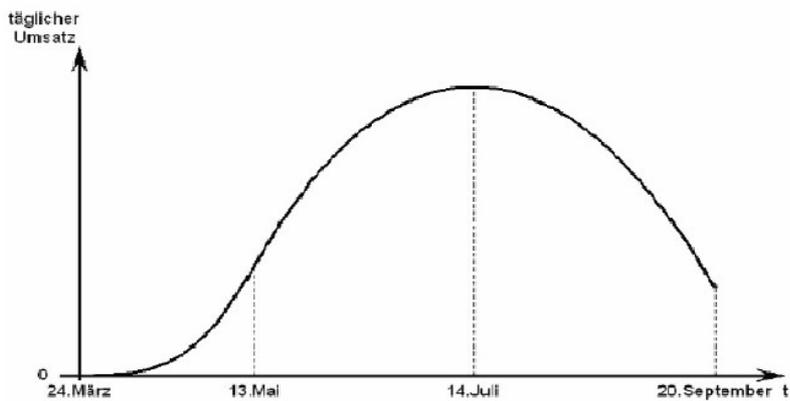
*Abbildung 1:
aus einem Eingangstest an der FH Kiel*

5. Aufgabe

Welcher der folgenden Werte ist der größte?

- a) $\sin 20^\circ$
- b) $\cos 20^\circ$
- c) $(\cos 20^\circ)^2$

*Abbildung 2:
aus einem Eingangstest der BA Karlsruhe
(wie die anderen abgebildeten Aufgaben auch
ohne Rechner zu bearbeiten)*



Geben Sie zu jeder der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

Die Zunahme des täglichen Umsatzes sinkt jeden Tag in der Woche vom 28. Juni bis zum 04. Juli.	<input type="checkbox"/> Richtig	<input type="checkbox"/> Falsch
Der Gesamtumsatz steigt am stärksten an einem Tag in der Woche vom 12. Juli bis zum 18. Juli.	<input type="checkbox"/> Richtig	<input type="checkbox"/> Falsch
Die maximale Zunahme des täglichen Umsatzes wird an einem Tag der Woche vom 12. Juli bis zum 18. Juli erreicht.	<input type="checkbox"/> Richtig	<input type="checkbox"/> Falsch
Der Gesamtumsatz sinkt jeden Tag in der Woche vom 16. August bis zum 22. August.	<input type="checkbox"/> Richtig	<input type="checkbox"/> Falsch

Abbildung 3: aus einem Eingangstest an der TU Darmstadt

Wie viele positive ganze Zahlen zwischen 1000 und 2000 sind durch 7 teilbar?

Abbildung 4: aus einem Eingangstest der Universität Bremen

„Rechnerfreie Mathematik“: Die Rolle neuer Technologien

Abb. 5 zeigt eine Aufgabe aus einer Einheit des Projekts CALiMERO Sek I. Zwei verschiedene Terme sollen den Flächeninhalt eines Rechtecks beschreiben, wobei zu prüfen ist, ob beide diesen Zweck erfüllen. Die Gleichwertigkeit wird insbesondere mithilfe von Technologie untersucht, indem anhand von Wertetabellen und Graphen verdeutlicht wird beide Terme für jede Konkretisierung von x denselben Wert annehmen. Ein Nachweis der Gleichwertigkeit ist nicht intendiert. Ziel ist es, dem zu vermittelnden Variablenbegriff mit der „Stellvertreterbedeutung“ einen weiteren Aspekt hinzuzufügen.

$(40+x)(60+x)$ und $40 \cdot 60 + 40x + 60x + x^2$
Wie kann man die Richtigkeit überprüfen?

x	$(40+x)(60+x)$	$40 \cdot 60 + 40x + 60x + x^2$
0	2400	2400
1	2501	2501
2	2604	2604
3	2709	2709
4	2816	2816

Abbildung 5: aus CALiMERO

Ein wesentliches Ziel des Technologieeinsatzes ist also eine verständnisorientierte Vermittlung mathematischer Begriffe und Verfahren. Das kann

auch dazu führen, dass gewohnte Unterrichtseinheiten großflächig umstrukturiert werden. Eine Einheit zu einem funktionalen Zusammenhang kann so damit beginnen, dass Funktionen in inner- und außermathematischen Kontexten mithilfe von Graphen und Tabellen erkundet werden. Die algebraische Behandlung der entsprechenden Gleichungen muss nicht wie üblich vorangestellt werden, sondern erfolgt erst bei solchen Problemstellungen, die eine exakte Lösung verlangen. Das aspektreiche Kennenlernen eines Funktionstyps steht so auch chronologisch im Vordergrund (Pinkernell 2009).

CALiMERO Sekundarstufe II

Eine erste Auswertung der Daten aus CALiMERO Sek I zeigt, dass der Einsatz von CAS nicht notwendigerweise zu schlechteren Leistungen in rechnerfreien Tests führen muss wie bei Einsatz von GTR (Pinkernell 2010). Untersuchungen in Thüringen bestätigen diese Einschätzung (Schmidt et al. 2009).

In einem Nachfolgeprojekt ab Sommer 2010 soll der Zusammenhang eines kompetenzorientierten Unterrichts mit Technologieeinsatz und mathematischen Grundwissen genauer untersucht werden. Hierzu werden bewährte Methoden zur Unterstützung der langfristigen Verfügbarkeit aus CALiMERO I weiterentwickelt und eine konzeptuelle und inhaltliche Präzisierung jenes „Grundwissens an der Schnittstelle Schule-Hochschule“ im Sinne der obigen Ausführungen vorgenommen. Der Einsatz dieser Methoden erfolgt in Oberstufen der niedersächsischen Projektschulen aus CALiMERO I, Kontrollgruppen werden nun auch aus anderen Bundesländern rekrutiert.

Literatur

- Bruder, R.; Ingelmann, M. (2009): CALiMERO aus Sicht der Forschenden. Der Mathematikunterricht, Heft 4, 13-19
- Bruder, R.; Greefrath, G.; Kramer, J.; Pinkernell, G. (2010): Schnittstelle Schule-Universität. Beiträge zum Mathematikunterricht
- Knospe, H. (2009): Mathematik an der Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule - Probleme und Perspektiven. Hauptvortrag während der Herbstagung des Arbeitskreises Mathematik und Informatik der GDM, Soest 25. bis 27. September 2009
- Nägerl, H., Becker, H., Harten, H.-U., Schulte, H.-D., Zerbst, J. (1973): Über die Schwierigkeiten der Studienanfänger in Medizin im Umgang mit der Mathematik. Didaktik der Mathematik, 2, 143-157
- Pinkernell, G. (2009): „Wir müssen das anders machen“ - mit CAS funktionales Denken entwickeln. Der Mathematikunterricht, Heft 4, 37-44
- Pinkernell, G; Bruder, R. (2010) Teaching With CAS and Supporting Basic Skills: First Concluding Results from 'CALiMERO', erscheint in den Proc. 34rd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Belo Horizonte, Brazil: PME