Roland RINK, Lüneburg, Torsten FRITZLAR, Halle

Zu Fähigkeiten von Grundschulkindern im Umgang mit Verhältnissen

Der Umgang mit Verhältnissen ist wesentlich für viele Bereiche des Alltags, aber auch der Schulmathematik. Für die Sekundarstufe denke man beispielsweise an die Bruch- oder Prozentrechnung, den Dreisatz, Proportionalität und Antiproportionalität, an die Ähnlichkeitslehre oder die Stochastik. Auch in der Grundschule gehen Lernende bereits – allerdings eher implizit und wenig systematisch – mit dem Verhältnisbegriff um (z. B. Maßstab, Zufallsgeneratoren).

Zu Fähigkeiten im Umgang mit Verhältnissen gibt es bereits umfangreiche Untersuchungen (z. B. HART, 1981; KARPLUS, 1983). Allerdings waren die beteiligten Schülerinnen und Schüler stets mindestens 12 Jahre alt. Mit PIAGET gibt es einen bedeutenden Entwicklungspsychologen, der jüngeren Kindern einen erfolgreichen Umgang mit Verhältnissen sogar vollständig abspricht. Uns scheint es deshalb eine wichtige Herausforderung, eine detaillierte Erkundung entsprechender Fähigkeiten bei Lernenden am Ende der (traditionellen) Grundschulzeit zu versuchen.

1. Theoretischer Rahmen

Eine mathematische Grundlegung des Verhältnisbegriffs ist auf verschiedene Arten möglich (z. B. STREHL, 1979). An dieser Stelle mag ein eher intuitiver Zugang genügen: Danach werden durch ein Verhältnis zwei Zahlen oder Größen (z. B. Längen, Gewichte, Zeitspannen) zueinander multiplikativ in Beziehung gesetzt.

Abhängig von der durch das Verhältnis beschriebenen Konstellation lässt sich zwischen verschiedenen (Verwendungs-) Typen von Verhältnissen unterscheiden. In der Literatur findet man häufig die folgende Differenzierung:

- Ist die beschriebene Konstellation durch eine Teil-Ganzes-Struktur gekennzeichnet, liegt ein *Teil-Ganzes-Verhältnis* dann vor, wenn sich eine Komponente des Verhältnisses auf einen Teil, die andere auf das Ganze bezieht. Teil-Ganzes-Verhältnisse sind grundlegend für die Bruch- und Wahrscheinlichkeitsrechnung.
- Entsprechend wird von einem *Teil-Teil-Verhältnis* gesprochen, wenn sich beide Komponenten auf Teile eines gemeinsamen Ganzen beziehen. Diese Verwendung von Verhältnissen ist im Alltag typisch.

- Wird eine Konstellation ohne Teil-Ganzes-Struktur durch ein Verhältnis beschrieben, findet sich in der englischsprachigen Literatur häufig der Terminus *„rate problem“*. Die Komponenten des Verhältnisses können dann demselben Größenbereich entstammen oder zu verschiedenen Bereichen gehören. Im zweiten Fall kommt es oft zu einer Reifikation der Relation (man denke beispielsweise an Geschwindigkeit, Dichte oder Druck).
- Ist eine Konstellation durch ein Zahlenverhältnis beschreibbar, kann die Frage nach dem *Grundverhältnis* – also dem Verhältnis mit den kleinstmöglichen natürlichen Zahlen als Komponenten – sinnvoll sein.

2. erste Ergebnisse einer kleinen empirischen Untersuchung

Der in einer Untersuchung zum Umgang mit Verhältnissen verwendete Kontext sollte Grundschulkindern bekannt, spracharm, wenig künstlich und unaufwändig sein. Besonders wichtig scheint uns darüber hinaus, dass er möglichst frei von weiteren Vorstellungen (beispielsweise zum Zufall oder zur Ähnlichkeit) ist, die in diesem Alter zu Verständnisschwierigkeiten oder zusätzlichen, das Umgehen mit Verhältnissen „überlagernden“ Anforderungen führen könnten. Zumindest für eine erste Erkundungsstudie haben wir deshalb ausschließlich auf Zahlenverhältnisse zurückgegriffen. Beispielsweise die in der folgenden Aufgabe beschriebene Situation – ein „rate problem“ – legte für alle beteiligten Viertklässler eine verhältnisbezogene Herangehensweise nahe: „Auf einem Sportfest gibt es ein Tauziehen zwischen Lehrern und Schülern. 3 Lehrer ziehen dabei so stark wie 6 Schüler.“

Aufgabe der Kinder war es nun, äquivalente Verhältnisse zu identifizieren (a) und zu konstruieren (b) (vgl. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1991).

a) äquivalente Verhältnisse identifizieren: Den Viertklässlern wurden weitere Tauziehspiele der Form „x Lehrer gegen y Schüler“ vorgegeben; basierend auf der (dann doch etwas künstlichen) Annahme, dass alle Lehrer sowie alle Schüler gleich stark sind, waren die Paarungen mit einem äquivalenten Kräfteverhältnis auszuwählen.
b) äquivalente Verhältnisse konstruieren (eine Proportion vervollständigen): Den Viertklässlern wurden weitere Lehrergruppen der Form „x Lehrer“ vorgegeben, zu bestimmen waren passende Schülergruppen, sodass resultierende Kräfteverhältnisse äquivalent bzw. „die Tauziehspiele auch unentschieden“ sind.

Diese Unterscheidung scheint uns wichtig: Während ein Bearbeiter bei Aufgaben des Typs b) lediglich mit einer Relation umgehen und zu dieser fehlende Werte bestimmen muss (Missing-Value-Aufgaben; TOURNIAIRE & PULOS, 1985), sind bei Aufgaben vom Typ a) verschiedene Relationen involviert. Noch wichtiger wird dies bei Vergleichsaufgaben („Gewinnen die Lehrer oder die Schüler das Tauziehspiel?“), deren Einbezug in die Hauptuntersuchung geplant ist.[1]

Des Weiteren wurden die in den Aufgaben verwendeten Verhältnisse variiert. Vorgegeben wurden einfache (z. B. 1:2, 1:3) und „schwierigere“ Grundverhältnisse (z. B. 2:3, 3:5) sowie „erweitere“ Verhältnisse mit (z. B. 3:9) oder ohne (z. B. 6:10) Teilerbeziehung.
Auch die zu beurteilenden oder zu ergänzenden Verhältnisse wurden hinsichtlich verschiedener Aspekte variiert. Sollen beispielsweise zur oben beschriebenen Situation die Vorschläge „9 – …“, „6 – …“, „12 – …“ zu passenden Lehrer-Schüler-Paarungen ergänzt werden, wird das Vervielfachen des Ausgangsverhältnisses bzw. das Nutzen äußerer Verhältnisse nahegelegt. Vorschläge wie „1 – …“, „4 – …“, „11 – …“… erfordern dagegen anspruchsvollere Herangehensweisen.

Bisher konnten wir 20 Kinder aus verschiedenen vierten Klassen zweier Grundschulen in halbstandardisierten Einzelinterviews von 30 bis 40 Minuten Länge mit diesen und ähnlichen Aufgaben konfrontieren. Die Antworten der Kinder ließen – auch bei der hier vorgestellten Aufgabe – vielfältige Bearbeitungsstrategien erkennen:

Gleiche Differenz: Verhältnisse werden als äquivalent beurteilt, wenn die beteiligten Zahlen dieselbe Differenz besitzen. Möglicherweise ist den so urteilenden Kindern der multiplikative Zusammenhang in der beschriebenen Konstellation unklar. Gelegentlich gehen aber auch Kinder bei „schwierigen“ Verhältnissen auf diese Weise vor, die bei einfachen Verhältnissen oder Verhältnisreihen zu richtigen Ergebnissen kommen. Es könnte sich also auch um eine Ausweichstrategie handeln, die aufgrund fehlender mathematischer Möglichkeiten herangezogen wird.

Verdoppeln und Halbieren: Verhältnisse werden als äquivalent identifiziert, wenn sie sich durch Verdoppeln bzw. Halbieren ineinander überführen lassen.

Verdoppeln, Halbieren und Zusammensetzen: Die vorherige Strategie wird von einigen Kindern um das Zusammensetzen erweitert: Das Ausgangsverhältnis ist 2:3; 4 - …, 6 - … „Ich habe erst verdoppelt, dann wusste ich, wie viele Kinder so stark wir 4 Lehrer sind. Dann musste ich nur noch 2

---

[1] Da für die uns interessierende Altersgruppe kaum Vorerfahrungen vorliegen, haben wir bei den ersten Erkundungen auf mitunter sehr anspruchsvolle Vergleichsaufgaben zunächst verzichtet.

Lehrer und 3 Kinder mit 4 Lehrern und 6 Kindern zusammenrechnen und das war dann 6 Lehrer und 9 Kinder.“

Inneres Verhältnis: Wenn es die Vorgaben ermöglichen (Teilerbeziehung), nutzen Kinder das innere Verhältnis: 1:2 – Ein Lehrer ist so stark wie zwei Schüler, die Anzahl der Lehrer muss immer verdoppelt werden.

Äußeres Verhältnis und Verhältnisreihe: Kinder nutzen äußere Verhältnisse (nicht nur Verdoppeln bzw. Halbieren) und bauen bei Bedarf eine Verhältnisreihe auf: 2:3 – 2 Lehrer sind so stark wie 3 Kinder, 4 Lehrer wie 6 Kinder, 6 Lehrer wie 9 Kinder, usw. „Die Lehrer sind immer die 2er Reihe und die Kinder immer die 3er Reihe.

Grundverhältnis: Ist das Ausgangsverhältnis „erweitert“ (z. B. 4:6), bilden einige Kinder zunächst das Grundverhältnis und arbeiten mit diesem weiter.

Die Auswertung zeigte zudem, dass die Aufgaben von über 80% der Kinder richtig gelöst wurden.

Ob der geringen Stichprobe müssen diese Ergebnisse natürlich mit aller Vorsicht betrachtet werden. Dennoch macht es Mut zu sehen, welche vielfältigen Strategien Grundschulkinder beim Lösen von Verhältnisaufgaben anwenden. Dies deutet an, dass die absolute Aussage von PIAGET doch nicht gültig ist.

Ähnliches dachte sich wohl auch FREUDENTHAL wenn er schreibt: „Warum weiß die Mehrheit der 16jährigen nicht mit Verhältnissen Bescheid? Weil sie, wenn überhaupt, dieses **natürliche Phänomen** [Hervorhebung, R. R.; T. F.] zu spät erlernt haben und dann gleich in gebrauchsfertiger algorithmisierter Form.“ (FREUDENTHAL, 1983, S. 6)

Literatur

Freudenthal, H. (1983). Rechnen – gibt es das noch? *Mathematik lehren*, 1, 4 – 9.

Hart, Kathleen M. (1980): Secondary School-Children´s Unterstanding of Ratio an Proportion. Dissertation. Betreut von David Johnson. London. Chelsea College.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1991). Ration in special education. In L. Streefland, *Realistic Mathematics Education in Primary School*. Utrecht.

Karplus, Robert; Pulos, Steven; Karplus, Elizabeth K. (1983): Early adolescents' proportional reasoning on ‘rate’ problems. In: Educational Studies in Mathematics, H. 14, S. 219–233.

Strehl, R. (1979). *Grundprobleme des Sachrechnens*. Freiburg.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16* (2), 181-204