KLAUS RÖDLER, Frankfurt

# Abstraktionsstufen der Zahl

## Zahlen und Rechnen aus kulturhistorischer Perspektive

Wir sind gewohnt, Rechenvorgänge als ein Operieren mit Zahlen zu begreifen. Rechendidaktik scheint daher zwangsläufig mit der Entwicklung von Zahlverständnis zu beginnen. Zahlen werden dabei mit den Zahlzeichen und Zahlwörtern identifiziert, die somit didaktisch mit Sinn zu unterfüttern sind. Ein Blick in die Kulturgeschichte zeigt jedoch, dass es sich bei Zahlzeichen und Zahlwörtern vor allem um Kommunikationsmittel handelt, um ein Vokabular, das bestimmte Aspekte der Wirklichkeit beschreibbar werden lässt. Und an diesem Vokabular lässt sich eine Entwicklung der zunehmenden Verschlüsselung beobachten, die sich als zunehmende Abstraktion niederschlägt. Strukturbedürfnisse bestimmen zunehmend die Gestalt der Worte und Zeichen. Wenn wir diese historische Tatsache ernst nehmen, erkennen wir, dass Zahlen auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau verstanden werden können und dass die *innere Zahl*', mit der ein Kind rechnet nicht notwendig die gleiche Struktur besitzt wie unsere *‚innere Zahl'*. Zwischen der *‚äußeren Zahl'*, mit der in der Klasse kommuniziert wird, und der *‚inneren Zahl'*, mit der ein Kind seinen Rechenvorgang faktisch steuert, ist daher zu unterscheiden. Dadurch bekommen wir neue Handlungsmöglichkeiten und gewinnen einen inklusiven Ansatz des Rechnens, der bis in den Bereich des Vorschulalters und bei Geistigbehinderten trägt.

### Was ist eine Zahl? Was heißt ‚rechnen'?

Zahlen können in sehr unterschiedlicher Gestalt daher kommen. Sie können ihren Gehalt unterschiedlich verschlüsseln. Jeder erkennt unmittelbar den Wert von ‚III'. Diese Zahl, es sind die ältesten Zahlzeichen der Menschheit, zeigt voll und ganz ihren kardinalen Gehalt. Und sie verweist zugleich auf ihren Ursprung, nämlich einen durchgeführten Zählprozess. Zahlen entstehen ursprünglich als *‚analoge Abbildung'*.

An der ägyptischen Tausend (Lotusblume) oder der römischen Fünfzehn (XV) erkennen wir einen Abstraktionssprung. Hier wird die Zahl aus Wertebenen gebaut, Wertebenen, die sich in ihrer Unterschiedlichkeit jedoch noch sichtbar machen. Diese symbolischen Wertebenen erlaubten es, auch große Zahlräume erkennbar darzustellen. Erst sehr jung ist dagegen unser Positionssystem, das die kardinale Grundlage wie auch die Struktur nach dezimalen Wertebenen endgültig in Ziffern und Positionen versteckt, was im Unterricht zu den beobachtbaren Konsequenzen führt: Schwache Rechner verstehen Zehner und Hunderter als unterschiedliche Arten von Einern und statt mit reversiblen Wertebenen rechnen sie mit den als Einern verstandenen Ziffern. (23+34= 57, weil 2+3=5 und 3+4=7)

Unser Verständnis von Zahlen ist durch die Zahlreihe geprägt ist. Wir zählen mit Worten („Eins, Zwei, Drei, …") und schreiben mit abstrakten Zeichen (1, 2, 3, …). Mit diesen Worten und Zeichen fängt alles an. Und für nicht wenige Kinder hört es damit auch auf. Rechnen bleibt Zählen, ergänzt mit zunehmenden Tricks wie ‚vorne mit vorne' oder ‚1 davor' oder ‚0 dran' oder ‚Ich denke mir das untereinander.'

Die Zahl des Rechenanfängers ist also nicht dieselbe wie die des kompetenten Rechners. Zahlen und Rechenvorgänge sind nur auf der Oberfläche der Worte und Zeichen gleich. Im Innern sind sie völlig verschieden.

Kinder, die in die Schule kommen, können im Allgemeinen etwas zählen und der Unterricht knüpft genau da an. Der Unterricht bestärkt das Zahlreihenkonzept, anstatt das protoquantitative Wissen zu nutzen, das die Kinder ebenfalls mitbringen. *„72% der Vierjährigen, 81% der Fünfjährigen und 92% der Sechsjährigen zeigen ein unerschütterliches Verständnis der protoquantitativen Veränderungen der Teile-Ganzes-Beziehungen"*, schreiben Gerster/Schultz. Dagegen gelingt es rechenschwachen Kindern gerade nicht, Zahlen und Rechenvorgänge im Zusammenhang mit diesen protoquantitativen Schemata, das heißt in den Strukturen von Teile-Ganzen-Beziehungen zu sehen.[1] Unsere abstrakten Zahlen lösen offensichtlich eine massive Verunsicherung aus, die eine Anbindung an die vorhandenen protoquantitativen Schemata erschwert.

Ich glaube, eine Ursache dafür liegt genau darin, dass wir unsere Zahlen nicht als ein Kommunikationsmittel begreifen, als eine bestimmte Sprache für Alltagserfahrungen, sondern dass wir die Abstraktionen für das Eigentliche nehmen. Indem wir von der gesprochenen und geschriebenen Zahlreihe ausgehen, behandeln wir die Worte und Zeichen als Zahlen, obwohl sie nur eine Wort- bzw. Zeichenfolge sind. Damit ist das rechenschwache Kind von Anfang an auf der falschen Spur.

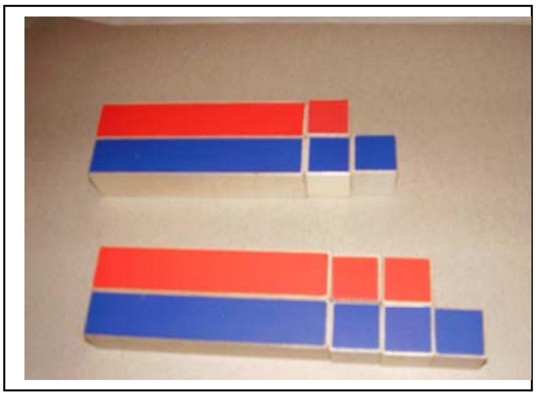
## Didaktische Konsequenzen[2]

Statt mit der Zahlwortreihe sollten wir mit dem Bilden *konkreter Zahlen* beginnen. Dazu suchen wir in unserer Umwelt sinnvolle, (für die Kinder relevante) Zählanlässe. Dieses Zählen findet aber auf Steinzeitniveau statt, das heißt, wir bilden die analoge Abbildung nicht in erster Linie in die Zahlwortreihe ab, sondern in ein konkretes Zählmaterial (Würfel) und übersetzen die Anzahl als Zahlzeichen in Form von Strichlisten. Kardinalität, Invarianz, Seriation und Klassifikation sind damit von Anfang an greifbare Eigenschaften der so gebildeten Zahlen. Unsere Zahlworte und Zahlzeichen sind dagegen nur Kommunikationsmittel, die daran angebunden werden und diesen Gehalt aufnehmen. Wir versuchen nicht die ‚3' mit der Menge ‚III' zu verbinden. Die ‚III' ist uns keine Darstellung der ‚3', sondern die ‚III' ist selbst eine in der Wirklichkeit gefundene und durch analoge Abbildung entstandene Zahl, die in symbolischer Schreibweise *auch* das Zeichen ‚3' hat.

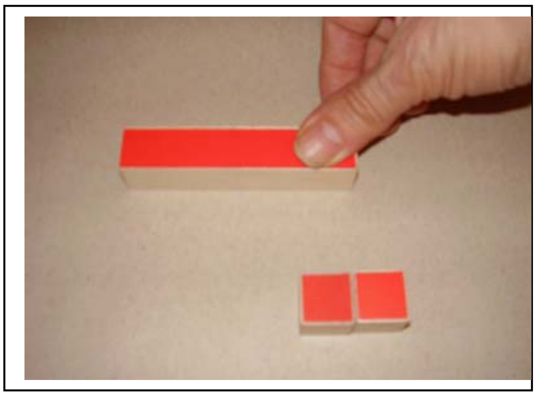
Rechnen im Anfangsunterricht wird zu einem *‚analogen Handeln mit konkreten Zahlen'*. Weil solchermaßen verstandenes Rechnen nur Handlungen nachspielt, die vom Alltag her protoquantitativ bekannt sind, können wir bereits in den ersten Schulwochen alle vier Grundrechenarten einführen. (Addieren heißt zusammenfügen. Subtrahieren heißt auseinanderziehen. Multiplizieren heißt mehrfach gleiches zusammenfügen. Dividieren heißt an eine bestimmte Anzahl von Kindern verteilen oder in gleiche Haufen aufteilen.) Nicht das Rechnen ist schwierig, sondern das Rechnen mit unseren Zahlen. Deshalb gilt es diese beiden Bereiche zu trennen, um den Bereich des Rechnens nicht mit dem Bereich der Zahlen zu behindern!

Das Rechnen mit *konkreten Zahlen* und der damit verbundene Verzicht auf den Primat der abstrakten Zahlreihe erlaubt es, Zahlen und Rechenvorgänge kardinal und damit vor allem im Blick auf deren innere Zusammenhänge und Strukturen kennen zu lernen. Operation-Gegenoperation, Teil und Ganzes tauchen automatisch als zu reflektierende Zusammenhänge auf. Gleichzeitig motiviert das Bedürfnis, gut wahrnehmbare Vorgänge zu haben, auf natürliche Weise Musterbildungen und die frühe Einführung einer ersten *konkreten Bündelung*, nämlich der Fünferstange.

Die Fünferstange als frühes Bündelungsobjekt hat drei zentrale Vorteile: Erstens lässt sie auch Zahlen über Vier spontan erkennbar werden. Zweitens erlaubt sie, klassische Aufgaben im Zwanzigerraum ohne Zehnerübergang zu lösen. Da der Zehner bei ‚6+7' oder bei ‚7+8' aus den beiden Fünfern entsteht, genügt es, die Fünferreste zu addieren.[3] Und schließlich zeigt sie den Kindern, dass eben nicht alles ‚Eins' ist und dass Wertebenen in reversibler Verbindung stehen. Damit legt sie den Grund für das Denken in Wertebenen. Anders als eine reine Färbung von Kugeln am Rechenrahmen oder der Perlenkette baut eine konkrete Bündelung wie die Fünferstange eine Grenze auf und zwingt, wie bei ‚7-3', in die Auseinandersetzung.



*6,7 und 8 mit Fünferstruktur*[4]



*‚7-3' durch virtuelles Entbündeln.*

Die didaktische Stufenfolge ‚enaktiv-ikonisch-symbolisch' beschreibt nur unzureichend, worum es eigentlich geht, denn sie unterschlägt, auf welcher Abstraktionsstufe die Handlung vollzogen, dargestellt und symbolisiert wird. Schon die enaktive Stufe der Rechenhandlung unterscheidet sich gravierend, je nachdem, ob sie mit Zählmaterial, konkreten Bündelungsobjekten, symbolischen Werten oder einem konkreten Positionssystem wie dem Rechenbrett durchgeführt wird. Jedes Rechenmittel setzt an einer anderen ‚inneren Zahl' an. Jedes erlaubt auf einem anderen Abstraktionsniveau verständig zu rechnen und Zahl-, bzw. Rechenzusammenhänge kennen zu lernen. Dies sollte im Arithmetikunterricht der Grund- und Sonderschule deutlich mehr Beachtung finden.

## Literatur


Flexer, R.J. (1986) The power of five: The Step before the power of ten.*Arithmetic Teacher, 33* (11), S. 5-9.

Gerster, D.D., Schultz, R. (2004) Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte. *freiburg.de/freidok/volltexte/2004/ 1397/ pdf/ gerster.pdf*, Freiburg

Ifrah, G. (1987) *Universalgeschichte der Zahlen* Frankfurt/New York: Campus

Rödler. K. (1998) Die Geschichte der Zahlen und des Rechnens. *mathematik lehren 87/98*

Rödler. K. (2006) *Erbsen, Bohnen, Rechenbrett: Rechnen durch Handeln* Seelze: Kallmeyer

Rödler. K. (2007) *Die rot-blauen Würfel und Fünferstangen* Seelze: Kallmeyer


---

1 Siehe Gerster, Schultz 2004, S. 78 f.

2 Umfassend ist das Konzept dargestellt in Rödler 2006. Siehe auch: www.rechnen-durch-handeln.de

3 Siehe dazu: Rödler 2006, S. 73 ff. und Gerster2004, S. 344 ff. und 365 ff.

4 Rödler 2007, S. 23 ff. und Flexer 1986