

CHRISTIAN RÜEDE, Universität Zürich

Andere sehen anderes – Lesarten algebraischer Ausdrücke

Kieran (1989) bezeichnet das Strukturieren algebraischer Ausdrücke als Hauptanliegen des Algebraunterrichts der Sekundarstufe I und II. Daher untersuchen viele Studien, wie Schüler und Schülerinnen strukturieren und was sie aus ihren Strukturierungen folgern (z. B. Malle, 1993; Sfard, 1991). Gegenstand der hier vorgestellten Untersuchung ist, wie der Prozess, durch den Experten sowie Schüler und Schülerinnen zu ihren Strukturierungen gelangen, modelliert werden kann. Dazu liegen meines Wissens keine Untersuchungen vor.

Was ist mit „Strukturieren“ gemeint?

Wer einen Term wie etwa $\frac{6x^3 + 9x^2}{4x + 6}$ vereinfacht, stellt Beziehungen zwischen Teilen des Terms her. Schwächere Schüler und Schülerinnen lesen diesen Ausdruck diagonal und stellen einen Bezug zwischen $6x^3$ und 6 her oder sie lesen den Ausdruck horizontal und versuchen die Addition im Zähler irgendwie auszuführen. Stärkere Schüler und Schülerinnen sowie Experten erkennen horizontale Verhältnisse wie 6 zu 9 und 4 zu 6 oder x^3 zu x^2 und x zu 1 und folgern, dass der Ausdruck gekürzt werden kann. Andere erkennen vertikale Verhältnisse wie 6 zu 4 und 9 zu 6 oder x^3 zu x und x^2 zu 1 und schließen mehr oder weniger direkt auf $\frac{3x^2}{2}$. Wiederum andere erkennen die Struktur $\frac{A}{B}$ und faktorisieren zuerst den Nenner, dann den Zähler, oder umgekehrt, und kürzen anschließend gemeinsame Faktoren. Egal, wie strukturiert wird, immer werden Bezüge im Ausdruck hergestellt und daraus Umformungen erschlossen. Diese Beobachtung legt nahe, unter *Strukturieren* eines algebraischen Ausdrucks das Herstellen von Bezügen innerhalb des Ausdrucks zu verstehen. Die Bedeutung der Struktur liegt in den *Inferenzen*, die mit ihr verbunden sind, etwa in den sich aus der Struktur ergebenden Umformungen.

Diese Umschreibung von „Strukturieren“ ist vor dem Hintergrund einer Wittgensteinschen Begriffsauffassung zu verstehen: die Bedeutung eines algebraischen Ausdrucks liegt in seinem Gebrauch; beim symbolischen Manipulieren also darin, wie mit dem algebraischen Ausdruck umgegangen, wie er – kontextabhängig – angemessen umgeformt werden soll. Die Syntax regelt bloß die Korrektheit von Umformungen. Die Semantik liegt im (typischerweise impliziten) Wissen darüber, welche Umformungen wann angemessen sind – eine Frage, die nicht rekursiv entscheidbar ist, al-

so über Mechanisches Manipulieren hinausgeht. Weil die Strukturen den Umformungen, die aus ihnen folgen, vorangehen, generieren sie Bedeutung. Insbesondere legt man sich mit jeder Struktur auf entsprechende Umformungen fest.

Strukturieren und Kohärenzbildung

Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks ist ein aktiver Konstruktionsprozess, eine Interaktion zwischen dem (als Zeichenreihe gegebenem) Ausdruck und der Person, welche den Ausdruck strukturiert. Je nach dem, über welches mathematische Vorwissen und über welche Schemata jemand verfügt und wie er die Kontextbedingungen in den Konstruktionsprozess einbindet, strukturiert er anders.

Ganz analog ist auch das Lesen eines Texts ein interaktiver Konstruktionsprozess zwischen dem Text und dem Leser. Auch bei diesem Prozess entscheiden Vorwissen des Lesers, die zur Verfügung stehenden Schemata und die Kontextbedingungen darüber, welche Bezüge zwischen den Satzteilen etabliert werden – man spricht hierbei von *Kohärenzbildung*.

Formal kann eine Analogie zwischen dem Strukturieren und dem Bilden von Kohärenz hergestellt werden. Beides sind interaktive Prozesse zwischen schriftlichen Dokumenten und dem Akteur, die durch Wahrnehmung und Kognition bestimmt sind, immer mit dem Ziel, identifiziere Einzelteile aufeinander zu beziehen. Die Struktur gibt dem algebraischen Ausdruck (im Kontext des symbolischen Manipulierens) seine Bedeutung, die Kohärenz dem Text, indem aus beiden einander entsprechende Inferenzen folgen. Im nächsten Abschnitt wird diese Analogie – welche als eine Analogie zwischen zwei Prozessen zu betrachten ist – ausformuliert.

Ein Prozessmodell des Strukturierens – in Analogie zum Textverstehen

Beim Textverstehen werden – mehrheitlich implizite – Teilprozesse postuliert, die nicht seriell, vielmehr parallel oder zeitlich überlappt und mehrmals durchlaufen werden (z. B. Ballstaedt, Mandl, Schnotz & Tergan, 1981). In Tabelle 1 sind diese Teilprozesse in die rechte Spalte eingetragen. In der mittleren Spalte sind die analogen Teilprozesse aufgelistet, die das Strukturieren algebraischer Ausdrücke bestimmen. Was unter diesen einzelnen Teilprozessen zu verstehen ist, wird nun erläutert.

Der algebraische Ausdruck liegt als visuell wahrnehmbares Objekt vor. Die vorkommenden Schriftzeichen werden also *decodiert*, das heißt, etwa als Variable oder als Relations- bzw. Operationszeichen erkannt. Die einzelnen Zeichen aktivieren Wissen über die Hierarchie und Gesetzmäßigkeiten der Operationen und über die Schreibweisen. Sie werden in diesen Begriffen

recodiert. Diese Recodierung ist abhängig von der Expertise. Beispielsweise erfassen schwache Schüler und Schülerinnen einen Term wie $2x - 2 \cdot y$ fälschlicherweise gerne als $(2x - 2) \cdot y$. Ein Unterschied zum Textverstehen zeigt sich in der Leserichtung. Texte werden typischerweise zeilenweise von links nach rechts gelesen. Algebraische Ausdrücke hingegen werden etwa von links nach rechts, von rechts nach links, von oben nach unten, von unten nach oben, diagonal oder von der Mitte aus gelesen.

	Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks	Verstehen eines Texts
Decodieren und Recodieren	Symbole (in nichtlinearer Leserichtung) erkennen und zu Teil-Termen zusammenfassen. Leitend dabei ist Wissen über die Hierarchie der Operationen, Schreibweisen und Gesetzmäßigkeiten der Operationen.	Buchstaben und Wörter (in linearer Leserichtung) erkennen und zu Propositionen („Sätzen“) zusammenfassen. Leitend dabei ist der Wortschatz und Wissen über die Grammatik.
Brücken-Inferenzen ausführen	When- und How-Schemata verwenden	Einzelinformationen verbinden
Enge Inferenzen ausführen	Umformen, Operationen ausführen	Intendierte, logisch zwingende Information einbeziehen
Elaborative Inferenzen ausführen	Mathematisches Vorwissen und Kontextbedingungen einbeziehen	Externe Information einbeziehen
Makrostrukturen bilden	Lösungsmethode identifizieren	Zusammenfassen

Tabelle 1: Teilprozesse beim Strukturieren alg. Ausdrücke und beim Textverstehen.

Ausgehend von den identifizierten Termen werden Bezüge zwischen diesen Termen hergestellt. Die Ausführung von *Brücken-Inferenzen* entspricht der Anwendung von Schemata. Mit solchen Schemata wird ein Vorschlag an die Ausdrücke herangetragen, welche Bezüge zu betrachten sind. Bei einem Ausdruck wie $\frac{24x + 8}{6x + 2}$ kann das lapidare How-Schema zur Anwendung gelangen, dass es sich hier um einen Bruch handelt und somit Nenner und Zähler zu faktorisieren sind. Der Ausdruck wird dann als $\frac{A}{B}$ strukturiert. Es kann bei diesem Ausdruck aber auch ein When-Schema verwendet werden, was beispielsweise zum Vergleich der Verhältnisse 24 zu 8 und 6

zu 2 führt. Je höher die Expertise einer Person, desto eher aktiviert sie nebst How-Schemata auch When-Schemata.

Nebst den Brücken-Inferenzen tragen auch *elaborative Inferenzen* zum Herstellen von Bezügen bei. Bei solchen Inferenzen führt der Einbezug von mathematischem Hintergrundwissen zu Bezügen. Zum Beispiel kann eine Gleichung wie $20x^3 + 30x^2 = 6x + 9$ als kubische Gleichung klassifiziert werden. Das Wissen über mögliche Lösungsverfahren kubischer Gleichungen kann motivieren, nach einem gemeinsamen Linearfaktor zu suchen, was dazu führt, dass man einen gemeinsamen Faktor links und rechts des Gleichheitszeichens sucht und somit im obigen Ausdruck einen Bezug zwischen 6 und 9 sowie 20 und 30 herstellen wird. Wenn zudem in der Aufgabe gefordert wird, dass die Gleichung im Kopf zu lösen sei, kann diese Rahmenbedingung die obige Argumentation unterstützen.

Schließlich führt das Ausführen von möglichen Umformungen sowie von vorliegenden Operationen dazu, dass an hergestellten Bezügen festgehalten wird oder dass neue Bezüge hergestellt werden können. Vor allem Novizen fassen beispielsweise einen Ausdruck wie $5x - 2 \cdot x$ primär als Multiplikation und weniger als Subtraktion auf. Erst wenn sie aufgrund des operationalen Bezugs von 2 und x ausmultiplizieren und das Ergebnis $2x$ erfassen, sind sie in der Lage, einen Bezug von dem links und dem rechts des Subtraktionszeichens herzustellen.

Vor allem beim Verstehen längerer Texte wird auch die Bildung von *Makrostrukturen* als Kohärenzbildung betrachtet. Dabei geht es darum, den bestehenden Text zusammenzufassen. Analog dazu wird auch für das Strukturieren ein Teilprozess vorgeschlagen, der im Zusammenfassen des Denkwegs besteht. Die Antwort auf die Frage, welche Lösungsmethode dem eigenen Vorgehen unterliegt, führt oftmals zur definitiven Strukturierung des Ausdrucks.

Literatur

- Ballstaedt, S. P., Mandl, H., Schnotz, W. & Tergan, S. O. (1981). *Texte verstehen, Texte gestalten*. München: Urban & Schwarzenberg.
- Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 33-56). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum, Hillsdale.
- Malle G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.
- Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 1-36.