

Susanne SCHNELL, Dortmund

## **„Manchmal braucht man auch sehr viel Glück“ – Entwicklung von Schülervorstellungen zum Zufall**

### **1. Individuelle Vorstellungen als Ausgangspunkt konstruktivistischen Lernens**

Die Stochastik gilt in der Mathematikdidaktik als ein Themengebiet, in dem Lernende einerseits über ein breites Repertoire an vorunterrichtlichen, individuellen Vorstellungen verfügen, und in dem andererseits der Aufbau tragfähiger Vorstellungen als besonders schwierig erlebt wird (vgl. Wolpers/Götz 2002, S.135ff.). Als Vorstellungen werden dabei alle subjektiven, mentalen Strukturen bezeichnet, die von Lernenden zur Interpretation eigener Erfahrungen genutzt werden. Sie können sich auf verschiedenen Komplexitätsebenen befinden und umfassen sowohl Begriffe und Konzepte als auch lokale Theorien (Gropengießer 2001, S.30ff.).

Neben zum Teil bereits tragfähigen Ansätze basieren individuelle Vorstellungen häufig auf dem Verständnis von Wahrscheinlichkeiten als Hilfsmittel, Ergebnisse einzelner Zufallsversuche vorherzusagen anstatt der Betrachtung großer Versuchsreihen (vgl. Konold 1991, S.146ff.). Das jenem empirischen Wahrscheinlichkeitsverständnis zugrundeliegende Gesetz der großen Zahlen hat sich als zentral erwiesen, um angemessene stochastische Aussagen überhaupt treffen zu können (Prediger 2008, S.145ff.). Die in vorunterrichtlichen Kontexten aufgebauten Vorstellungen haben sich jedoch möglicherweise in der persönlichen Erfahrung der Lernenden als hilfreich beim Umgang mit (einzelnen) zufälligen Vorgängen erwiesen und können als Filter für neue (mathematische) Konzepte dienen, welche sich erst an den bestehenden beweisen müssen (vgl. Confrey 1990, S. 19ff).

### **2. Vorstellungsentwicklung in der Stochastik**

Die individuellen Vorstellungen der Lernenden sind also wichtige Ausgangspunkte beim Aufbau mathematischer Vorstellungen (Konold 1991, S.140ff.). Im Sinne des Conceptual Change Ansatzes kann Vorstellungsentwicklung in zwei Richtungen verlaufen (Prediger 2008): Vertikal gedacht werden individuelle Vorstellungen durch den Unterricht zu tragfähigen überformt. Empirische Untersuchungen wie Konold (1991) zeigen allerdings, dass Lernende auch nach einem Stochastikunterricht weiterhin bestehende, individuelle (und zum Teil mathematisch nicht tragfähige) Vorstellungen in außerschulischen Situationen aktivieren. Demnach scheinen sich mathematische Vorstellungen nicht nur vertikal aus individuellen Vorstellungen heraus zu entwickeln, sondern auch horizontal zu ihnen

(Prediger 2008, S.132ff). Das Zusammenspiel verschiedener Vorstellungen sowie deren Entwicklung aus- und miteinander ist der Forschungsgegenstand der hier vorgestellten empirischen Studie, die innerhalb eines langfristigen Projekts zur Didaktischen Rekonstruktion der Einführung in die Stochastik angesiedelt ist (Prediger 2008).

### **3. Empirische Interviewstudie zur Vorstellungsentwicklung in der Stochastik – Lernumgebung und Methoden**

Zur Untersuchung der Entwicklung stochastischer Vorstellungen wurde mit zehn Paaren von Schülerinnen und Schülern der 6. Klasse einer nordrhein-westfälischen Gesamtschule eine Reihe von aufeinander aufbauenden Spielinterviews geführt. Die Lernenden hatten zuvor noch keinen Stochastikunterricht in der Sekundarstufe I erhalten. Kernelement der für die Interviews genutzten Lernumgebung „Wettkönig“ (Husmann/Prediger 2009) ist ein Würfelspiel, bei dem die Lernenden aufgefordert werden, auf das schnellste von vier Tieren (Ameise, Frosch, Schnecke, Igel) zu wetten. Angetrieben werden die Tiere von einem 20-seitigen Farbwürfel mit ungleicher Farbverteilung, so dass die rote Ameise mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{7}{20}$  theoretisch das schnellste Tier ist. Für den Aufbau von Vorstellungen zum Gesetz der großen Zahlen ist die Unterscheidung der kurzen und langen Sicht zentral; im Kontext der Lernumgebung also die Anzahl der Würfelwürfe, nach der das Gewinnertier bestimmt wird: hier wird durch den Einsatz vorgegebener Protokolle explizit die Unterscheidung zwischen kurzen und langen Spielen (bis Wurfanzahl 10.000 über eine Computersimulation) vorgenommen. Die Lernumgebung dient zur Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs als Vorhersage über die Ergebnisse bei großer Versuchsanzahl im Sinne einer prognostischen Wahrscheinlichkeit. Schülerinnen und Schülern wird durch die konkrete Handlungssituation des Wettens eine Aktivierung und Auseinandersetzung mit individuellen Vorstellungen sowie die Ausdifferenzierung der Vorstellungen zur Auswirkung des Gesetzes der großen Zahlen ermöglicht.

Zur Betrachtung der Vorstellungsentwicklung wurden die Interviews hinsichtlich der gebildeten Konstrukte untersucht. Konstrukte werden dabei als Aussagen verstanden, die zur Vorhersage oder Erklärung bestimmter Situationen (z.B. Würfelergebnisse oder Spielausgänge) dienen und Elemente verschiedener Vorstellungen sein können. Die Analyse auf der Ebene der Konstrukte ermöglicht Einsicht in die Zusammensetzung und Struktur von Vorstellungen.

#### 4. Erste Einblicke in die Fallstudie zur Vorstellungsentwicklung von Ramona und Sarah

Die Schülerinnen Ramona und Sarah arbeiteten in fünf aufeinanderfolgenden Interviewsitzungen im Zeitraum von zwei Wochen an der Lernumgebung „Wettkönig“ und wurden dabei videographiert. Die folgenden Ergebnisse beziehen sich auf die erste Interviewsitzung, in denen die Schülerinnen versuchten herauszufinden, auf welches Tier man „besonders sicher“ wetten kann und warum.

Nach den ersten vier Spielen (Wurfanzahl zwischen 25 und 40) äußert Ramona eine Einschätzung der Siegchancen mit der Ameise als schnellstes Tier, die sie mit ihrer bisherigen Erfahrungen begründet. Zu diesem Zeitpunkt scheint den Schülerinnen die Farbverteilung des Würfels noch nicht präsent zu sein, sie wird jedoch direkt im Anschluss auf einen Impuls von Sarah hin ausgezählt. Dieses Konstrukt „Farbverteilung“ dient im folgenden Verlauf des Interviews nicht nur zur Erklärung einzelner Würfelergebnisse, sondern auch dazu, die von Ramona geäußerte Beobachtung, die bisher nur empirisch erklärt werden konnte, weiter zu entwickeln:

*I: „Jetzt habt ihr das ja ausgezählt- was heißt das denn?“*

*Sarah: „Dass Rot also mehr- also dass Rot eigentlich gewinnt, weil das hat mehr und dann kommt man auch mehr darauf, wenn man so jetzt würfelt“*

Das zuvor rein empirisch begründete Konstrukt, dass das rote Tier das schnellste sei, wird nun über die Verteilung der Farben begründet, die desweiteren auch als Erklärung für das empirische Ergebnis dient. Das Konstrukt der Farbverteilung als grundlegendes Element für die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse führt somit zu einer vertikalen Entwicklung eines bestehenden Konstrukts und sichert dies zusätzlich ab.

Im weiteren Verlauf des Interviews zeigt sich, dass sich Konstrukte nicht nur linear weiter entwickeln können. Die folgende Aussage von Ramona zur Begründung, wieso sie bei einem Spiel mit Wurfanzahl zwei auf Frosch wetten möchte, ist eine Kombination von ‚Ameise als schnellstes Tier‘, ‚Farbverteilung‘ und eines Konstrukts ‚Glück‘, das vor allem für Ramona immer wieder zur Erklärung (theoretisch) unwahrscheinlicherer Ereignisse dient: *„Ähm, also das (zeigt auf Ameise) hat ja sieben, also sieben Punkte auf dem Würfel und das (zeigt auf Frosch) nur fünf. Also, das sind ja zwei weniger und dann könnten wir ja uns mal was trauen und das nehmen (...) und dann haben wir vielleicht weniger Chancen aber wenn wir Glück haben gewinnen wir vielleicht auch.“*

Diese reflektierte Vorstellung ist eine tragfähige Strategie für die vorliegende Situation und veranschaulicht, dass sich zeitlich nacheinander aufgebaute Konstrukte zu komplexeren Netzen zusammensetzen.

## **5. Vorstellungsentwicklung über die Betrachtung von Konstrukten**

Diese exemplarischen Einsichten in die Fallstudie zeigen, wie sich Konstrukte auf verschiedene Arten entwickeln und kombinieren. Im weiteren Verlauf der Studie stehen die Analyse der anschließenden Interviewsitzungen sowie ein Vergleich mit Ergebnissen anderer Interviewpartner im Vordergrund.

Ziel der Analysen ist die Beschreibung der Lernwege der Schülerinnen und Schüler. Desweiteren sollen so Konstrukte identifiziert werden, die zu einem mathematisch tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbegriff führen. Das Erkennen der Zusammenhänge zwischen solchen Konstrukten kann dann zur Weiterentwicklung der Lernumgebung oder Übertragung auf andere beitragen.

*Dieses Projekt ist eingebunden in das Forschungsprojekt „Kontexte für sinnstiftenden Mathematikunterricht“ (KOSIMA) unter Leitung von B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders und S. Prediger.*

## **Literatur**

- Confrey, J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science, and programming. In C. B. Cazden (Hrsg.), *Review of research in education* (Vol. 16, S. 3-55). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Gropengießer, H. (2001). *Didaktische Rekonstruktion des Sehens*. Wissenschaftliche Theorien und die Sicht der Schüler in der Perspektive der Vermittlung. Oldenburg: Didaktisches Zentrum der Universität Oldenburg.
- Hußmann, Stephan / Prediger, Susanne (2009). Je größer die Wurfanzahl, desto sicherer die Wette – Mit dem Spiel Wettkönig den Zufall auf lange Sicht erkunden. In *Praxis der Mathematik in der Schule*, 51(25), S. 24-29.
- Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs About Probability. In v. Glasersfeld, E. (Hrsg.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (S. 139-156). Amsterdam: Kluwer.
- Prediger, S. (2008): Do you want me to do it with probability or with my normal thinking? Horizontal and vertical views on the formation of stochastic conceptions. In *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 3(3), S. 126-154.
- Wolpers, H./Götz, S. (2002): Didaktik der Stochastik, Bd. 3. In Tietze, U.-P./Klika, M./Wolpers, H. (Hrsg.), *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*, Braunschweig: Vieweg.